ぼくは胡桃（くるみ）の殻に閉じこめられても，
無限の宇宙の帝王と思っていられる人間だよ

ウィリアム・シェイクスピア『ハムレット』
第 2 幕第 2 場（野島秀勝訳，岩波文庫）

はじめに

非常に大きな概念について非常に短い紹介*1を書くというのは逆説的に見えるかもしれないが，無限は逆説的なのである．また，無限はきわめて役に立つので，無限なくしては数学者や数学の利用者は途方に暮れるだろう．しかしながら，十分注意して扱わなければ，無限は物騒でもある．哲学者や神学者は，重点を置くところは違うものの同じ二律背反に直面してきた．無限を目の前で爆発させずに扱う方法を学ぶのに 2000 年以上もかかったし，それでもなお，問題を引き起こすことがある．

無限についての具体的な言葉の使用が最初に記録されているのは，一般にはアナクシマンドロスによるものとされている．アナクシマンドロスは，ソクラテスより前のギリシアの哲学者で，紀元前 580 年前後に活躍した．彼の使ったアペイロンという用語は，果てしない，限りない，限定されない，無限などのいくつかの言葉に翻訳することができる．アナクシマンドロスは，あらゆるものの起源の探索という文脈でこの言葉を使った．アナクシマンドロスは，その起源をどこまでも続く始原体の塊と考えていた．無尽蔵のアペイロンは，果てることなく存在するあらゆるものを生み出すことができた．アナクシマンドロスが正確に何を考えていたかは明らかではないが，多くの学者はそれを地球，大気，火，水という 4

*1 ［訳注］原著はオックスフォード大学出版局が発刊している A Very Short Introduction シリーズの中の一冊として刊行された．

種類の古代の元素に分けることのできる一種の原始的混沌状態と考えている．ギリシア人は，この 4 種類の元素からほかのすべてのものが形作られると信じていた．

アナクシマンドロスは，形のない混沌から正反対の性質が引き離されることによって秩序ある現実が創られた(あるいは，絞り出されたというほうがよいかもしれない)と提唱した．この点において，アペイロンは，粒子と反粒子の対の出現という今日の物質の起源についての量子力学的説明に似ている．また，新たな宿泊客を収容するために無限に多くの宿泊客が部屋を移るヒルベルトのホテルに登場するトリックのように，無限集合がその真部分集合と 1 対 1 に対応するガリレオのパラドックスを思い起こさせる．これらはいずれも，何も使い切ることなく無限集合から何かを取り出していると解釈できる．このパラドックスの解決は，無限に対する理解を大きく前進させる鍵となる一歩であった．それは，ゲオルク・カントルによるある無限はほかの無限よりも大きいという理解である．

無限の数学的特性についての知られている最初の言及は，これもソクラテスより前の紀元前 490 年から 430 年ごろの哲学者であるエレアのゼノンの有名なパラドックスである．その中でももっとも有名なものは，アキレスと亀が競走する寓話で，亀はアキレスよりも前方からスタートする．アキレスは，亀より速く走れるにもかかわらず，けっして亀に追いつくことができない．なぜなら，アキレスが，亀がいたところに達したときには，亀はもう少し先に進んでいるからである．したがって，アキレスは，亀に追いつくまでに無限に多くの仕事を遂行しなければならないが，それは不可能とされた．ゼノンのパラドックスは一見すると単純そうだが，空間，時間，移動，因果関係についての私たちの直感に疑いを抱かせる．

無限は，数学のもっとも単純でもっともありふれた分野である算数に潜んでいる．数について最初に学ぶとき，子供はしばしば最大の数を知りたいと思い，名前を知っている百とか千とかの最大の数にたどり着く．しかし，ほとんどの子供は，すぐに最大の数がないことに気づくようになる．なぜなら，どのような数でもそれに 1 を加えるとさらに大きくなるからである．このことについての一つの言い方は，「最大の数はない」というものだ．アリストテレスは，この種の無限を「可能無限」と呼んだ．もっと論争を引き起こすが数学的，哲学的な裏付けのある別の表現は，「自然数は無限に存在する」である．アリストテレスは，この種の無限を「実無限」と呼んだ．しかし，アリストテレスは，私たちが今日行っているようには現実と数学を区別しなかったので，「実」は誤った名称である．

なぜ，けっして直接遭遇することのない概念である無限について考える必要があるのか．それには多くの理由がある．小学校の算数でさえ，たとえば，分数 1/3 を小数で書き表すときなどに，無限の一面に遭遇する．正確な表現を得るためには，小数点以下で「循環」，すなわち，同じ数字の並びを限りなく繰り返さなければならない．さらに一般的には，私たちの心は，空間や時間において，また，未来や過去に向かって物事が「永久に続く」という発想を求めているように思われる．無限は，おそらく，私たちの心にもともと備わった振る舞い，すなわち，規則性を探し求める私たちの心の能力の自然な副作用なのであろう．進化は，現実のものであろうと想像上のものであろうと外界の規則性に気づくように私たちを形作った．規則的な繰り返しには，存続価値がある．変わることなく永久に進むことは，おそらく，すべての規則的な繰り返しの中でもっとも単純なものだろう．

その結果として，時間とはつねに存在するような何かであり，それゆえ，時間に始まりがないという説明に満足する．時間は何らかの形で始まるというのは現在の宇宙論が提示していることであるにもかかわらず，私たちは，時間に始まりがないほうが安心できることを知っている．時間に始まりがあるとしたら，それ「以前」はないということを私たちは理解せずに，「それ以前には何があったのか」と問うて反論する．空間は無限であり，この宇宙は限りなく広がると考えることを好む．なぜなら，そうでないとすると，境界がなければならず，「その境界の向こう側には何があるのか」と問うことを考えるからである．これは二つの点で間違っている．この宇宙がどこかで終わっているならば，その先には何もない．空っぽの空間さえないのである．そして，宇宙は有限だが境界がないということもありうる．

無限，とくに無限の時間である永遠は，ほとんどの宗教的思考において重要な役割を演じる．無限は，哲学における標準的なテーマである．また，科学者だけでなく芸術家の興味も惹きつける．無限は深い感銘を与えるように思われ，あらゆる種類の性質を無限の結果と考えることができ，そして，あなたの論理に誤りがない限りあなたが間違っていると誰も証明できない．もっと前向きにとらえれば，無限は，繊細さ，論理的落とし穴，パズル，パラドックスに溢れた魅力的な概念である．

無限に関する最大のパラドックスの一つは，それがきわめて役に立つことが分かったということだ．微積分の背後にある素晴らしい発想によって，人類は月にまで連れていってもらい，毎日，何百万人もの人が飛行機で世界中を飛び交っている．数学者は，有限集合を数え上げる組合せ論のような研究分野でさえ，無限を使わずには

目的を達するのが非常に困難であることを知っている．このような数え上げの規則性は，しばしば生成関数と呼ばれる無限の対象一つにうまく押し込むことができ，完全に有限なことについての有用な情報を得るために生成関数は操作される．

数学者は，無限を表すのに特別な記号 ∞ を割り当てさえした．近年，特定の**種類**の無限には $\aleph_0$ や ω などの記号が割り当てられた．これについては第 7 章で紹介する．無限の理解に対するおそらくもっとも重要な数学的貢献は，同じ「無限」という言葉に多くの相異なる解釈がありうるという認識だろう．これらの解釈は厳密に定義することができ，その類似点と相違点は定義から論理的に導くことができる．

数学は無限に対するすべての参照を禁じるべきというような哲学的な考えも存在するが，実質的に活動している世界中のすべての数学者は，この無限という概念が役に立つだけではなく必要不可欠であることを分かっている．しかしながら，物理的な無限についても興味深い科学的問題がいくつかある．たとえば，この宇宙は有限か，それとも無限か．ブラックホールの中では何が起きているのか．通常，無限は彼らの理論が現実から乖離している兆候だと物理学者は解釈する．しかし，彼らの多くは，無限の宇宙というアイディアをむしろ好む．この矛盾の背後にある心理学については，第 6 章で調べることにする．

無限は諸刃の剣である．相当の注意をもって使えば，現代科学のほとんどの基礎となる微積分のような重要な方法を開拓する．今日の技術的に感嘆すべきことの多くは，無限のある一面を使って発明された．有限な二進数の演算を行うディジタル技術でさえ，材料科学，光学，化学，量子物理学を使って組み上げられている．そし

て，そのすべてに不可欠な手段として無限の数学が含まれている．

こうした偉業にもかかわらず，無限の使い方をほんの少し変えるだけで，どれも同じようにナンセンスになってしまう．そして，重要なものとばかばかしいものの間の境界線を見定めることはつねに簡単というわけではない．こうしたすべてのことが，無限を，これまでに発明された概念の中でもっとも魅力的なものにしている．「発明」という言葉が当てはまるのであれば．

本書の構成

導入部では，いくつかの基本的な問題とその答えを提示できても，それらの背後にあるもっと深遠な問題については軽く触れることしかできない．ここでの主な狙いは，これらの問題について考えてもらい，無限を熟考するときに哲学者，神学者，数学者がせざるをえない微妙な区別への関心を高めてもらうことである．私の視点は，論理的な問題に焦点を当てる現代の純粋数学の視点である．物理学や応用数学では無限をそれほど形式ばらずに使うことが多いが，本書は包括的な学術論文ではないので，その表面的な部分だけをざっと眺めることにする．

それゆえ，肩慣らしの第 1 章では，パズル，パラドックス，そしていくつかの証明といった無限について論証する 9 種類の典型的な例を紹介することから始める．これらの例をそれぞれ簡単に考察し，その手法または答えが論理的に受け入れられるものかどうかを分析する．そのうちのいくつかはさらに考察する価値があり，それらにはのちほど立ち戻る．

第 2 章では，無限についてのよくある思い違いを挙げて，無限

が小学校の算数においてどれほど自然に現れるかを示す．その狙いは，数学の基本的な領域にさえ，無限がいかに深く組み込まれているかを示すことであり，私たちが理解していると考えているテーマについての起こりうる混乱を明らかにすることである．

第3章は，主として，哲学と宗教における無限の歴史的な特質に焦点を当てる．それには，ゼノンの有名なパラドックスも含まれる．無限は，ものではなく，人間の精神にあらかじめ備わっている働きに関連した概念である．ゼノンのパラドックスは，物理的現実についてのように見えるが，主に私たちが空間，時間，移動をどのように考えるかを扱う．重要な(しかし，時代遅れかもしれない)貢献として，アリストテレスによる実無限と可能無限の区別があった．オリゲネスからアクィナスに至る神学者は，その議論を際立たせ，イマヌエル・カントのような哲学者はその挑戦に応じた．数学者は，哲学者からの頻繁な抵抗に対して，劇的な進歩を遂げた．

第4章では，無限大の論理的な裏返しである無限小を調べる．無限小は，無限に大きいのではなく，無限に小さい量である．歴史的には，このような量は，これまでに発明された中でもっとも役立つ数学の分野である微積分の基礎を構成した．しかしながら，無限小は，解決までに2世紀ほどかかった議論の口火を切り，かなりの悩ましい問題を引き起こした．これは，アリストテレスの可能無限の一種，具体的には，そういう言葉があるとすれば可能無限小を使うことで成功を収めた．(今では，この言葉はある．)

いくつかの状況で，どちらかといえば何気なしに，無限を概念と呼んできた．だが，そうではない．無限はメタ概念である．程度の差はあれ関連するアイディアを一まとめにして，同じ名前を装ったものだ．哲学的，数学的な楽しみの多くは，異なる意味をばらばら

に裂き，どちらが合理的であるか，そしてその理由を決めることから生じる．分かりやすい例は，無限の別の領域である射影幾何に議論の急ハンドルを切る第５章に現れる．ユークリッドは，公理の一つとして平行線はけっして交わらないことを主張した．しかし，イタリア・ルネッサンス期の画家は，遠近法を解析し，無限遠においてではあるが平行線は交わると主張することが合理的な，幾何学の豊かな鉱脈に遭遇した．駅に立って線路がはるか彼方で消えてしまいながら一点に集まるのを見たことがあるならば，読者は幾何学的な無限の一端を垣間見ている．

第６章では，数学から現実世界へと移動し，「空間は無限か」などの問題に取り組む．物理学の多くの領域で，（しばしば特異点と呼ばれる）無限の量の存在は，その理論が現実と乖離しているという警告と解釈される．たとえば，古典的な光線光学に従えば，レンズの焦点における光の強度は無限大になる．この問題点を物理的に解決するには，光線を波で置き換えるようにする．しかしながら，宇宙論では，無限の空間の可能性はきちんとしたものである．

第７章では，無限の数学に立ち戻り，無限集合をどのようにして数えるかというカントルの素晴らしい理論と，異なる大きさの無限があるという発見について論じる．たとえば，すべての整数からなる集合は無限集合であり，すべての実数（無限小数）からなる集合も無限集合であるが，これらの無限は根本的に異なり，整数よりも実数のほうが多い．ここでは，「数」は超限基数と呼ばれる．比較のために，無限集合を順に並べることによって，それに数を割り当てる別の方法にも言及する．これは，超限順序数につながる．そして，昔からの実無限と可能無限の哲学的区別が現代数学にも関係するかどうかを問い，数学的存在の意味を調べることで締めくくる．

目　次

はじめに

1　パズル，証明，パラドックス …… 1

2　無限との遭遇 …… 15

3　無限の歴史観 …… 31

4　表裏一体の無限 …… 61

5　幾何学的な無限 …… 81

6　物理的な無限 …… 103

7　無限を数える …… 117

参考文献　152

訳者あとがき　155

索　　引　157

1　パズル，証明，パラドックス

無限について批判的かつ想像力豊かに考えるために，無限を使った演繹と問題をいくつか挙げよう．そのあるものは正しく答えているが，あるものは正しく答えておらず，そして，あるものはまったく不可解である．先に読み進める前に，それらについて考えてみよう．そして，それらを比べてみよう．なぜ，一部のものに意味があるが，ほかのものは無意味なのだろうか．

無限に関する９種類の主張

最大の数

無限大(∞)は，存在する数の中でもっとも大きい．したがって，$\infty+1=\infty$ である．この両辺から ∞ を引くと，$1=0$ が得られる．

正方形の対角線

単位正方形の対角線に沿った規則正しい「階段」を想像してみよう(図 1)．このジグザグになった折れ線の全長は，2 である．なぜなら，水平部分の総和は 1 であり，鉛直部分の総和も 1 だからである．この階段の段数を無限に増やすと，それぞれの段は無限に小さくなり，階段は正方形の対角線になる．それゆえ，正方形の対角線の長さは 2 である．

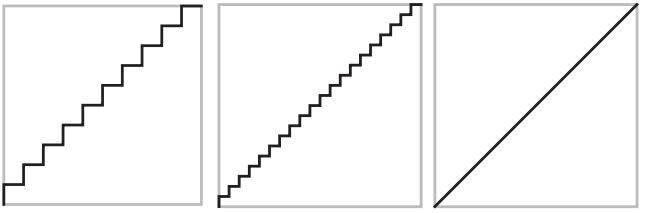

図 1　左，中：階段を次々と細分化する．右：無限の細分化による極限.

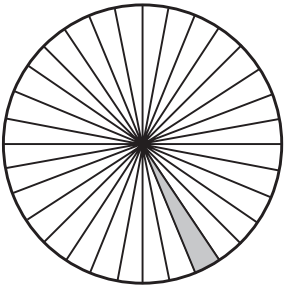

図 2　無限個の無限に薄い三角形：そのうちの一つを網掛けにしている(32 個に分割したものを示した).

円の面積

円は，無限に多くの無限に短い線分で構成される曲線である．図 2 のようにそれらと円の中心を結ぶと，無限に薄い三角形が無限個できる．それぞれの三角形の高さは，円の半径 r に等しい．b を三角形の底辺の長さとするとき，それぞれの三角形の面積は $\frac{1}{2}r{\cdot}b$ であるから，円の面積はその周長に $\frac{1}{2}r$ を掛けたものになる．円の周長は $2\pi r$ であるから，円の面積は $\frac{1}{2}r{\cdot}2\pi r{=}\pi r^2$ である.

電灯のスイッチ

時刻 0 に，電灯のスイッチを切る．その 2 分の 1 秒後に，電灯のスイッチを入れる．その 4 分の 1 秒後に，電灯のスイッチを切る．その 8 分の 1 秒後に，電灯のスイッチを入れる．その 16 分の 1 秒後に，電灯のスイッチを切る，というようにどこまでも続ける．それぞれのスイッチを入り切りする間隔は，その直前の間隔の半分である．それでは，1 秒後には，電灯は点いているだろうか，それとも消えているだろうか．

袋の中の玉

1，2，3，… と番号のつけられた無限個の玉と空っぽの袋がある．時刻 0 に，1 から 10 までの玉を袋に入れ，番号 1 の玉を袋から取り出す．時刻 1/2 に，11 から 20 までの玉を袋に入れ，番号 2 の玉を袋から取り出す．時刻 3/4 に，21 から 30 までの玉を袋に入れ，番号 3 の玉を袋から取り出す．時刻 7/8 に，31 から 40 までの玉を袋に入れ，番号 4 の玉を袋から取り出す，というようにどこまでも続ける．袋の中の玉は毎回 9 個ずつ増える．このとき，1 秒後には，袋の中に何個の玉が入っているだろうか．

$\frac{1}{3}$ の小数表記

1/3 を小数で表そうとすると，決して終わることはない．なぜなら，10 割る 3 は 3 余り 1 なので，計算結果は 0.333 333 … と 3 を無限に繰り返すからである．たとえば，0.333 333 のように特定の場所で計算をやめると，この数は 1/3 より小さい．なぜなら，この数に 3 を掛けると 0.999 999 になるが，これは 1 と 0.000 001 だけ異なる．すると，無限(循環)小数 0.333 333 … は 1/3 より小さい

のか，それとも 1/3 にぴったり一致するのか．

平方数と自然数

ガリレオの 1638 年の『新科学対話』からの次の引用は，長くなるので少しばかり編集してある．

サルヴィヤチ　大きいとか，小さいとか，或ひは相等しいとかいふ言葉は無限なものには通用しないからです．[…]

勿論貴方は平方數と，平方數でない數との區別を御存じのことと思ひますが？

シムプリチオ　よく知つてゐますとも．平方數は任意の數にそれ自身を掛け合せて出來る數です．例へば，4，9 は夫々 2，3 から作られる平方數です．

サルヴィヤチ　よろしい．ではその積を平方數と呼ぶとともにその因數を邊または根と呼ぶこと，また二つの同じ因數の積でない數は平方數と呼ばないといふことも知つてゐるでせう．そこで平方數と非平方數とを含めたすべての數は平方數だけよりも多いと斷言しても嘘ではないでせうね．

シムプリチオ　さうですとも．

サルヴィヤチ　もし更に私が，平方數は幾つあるか，と質問したとすれば，貴方は，それに對應した根の數だけある，と答へるでせう？ 正にその通りです．どの平方數も自分の根を持ち，どの根も自分の平方數をもち，且つ一つ以上の根を持つてゐる平方數はなく，一つ以上の平方數を持つてゐる根はないからです．[…]だが，根は幾つあるかといへば，如何なる數もある平方數の根と考へられるから，それは數の全體と同じだけ，

と言はざるを得ません．［…］

サグレド　さうなると一體，結論はどうなるのでせうか．

サルヴィヤチ　私には凡ての數の總體は無限であり，平方數の數も無限であり，その根の數も無限であり，平方數の數が凡ての數の總體より少いといふことも，又後者が前者より多いといふこともなく，最後に「等しい」，「多い」，「少い」といふ屬性はたゞ有限量にのみあつて，無限量にはない，としか言ひ得ません*1．

ヒルベルトのホテル

ダフィット・ヒルベルトは，1924年の講義で，カントルの無限(超限基数)の理論を，1，2，3，…と番号のついた無限の部屋のあるホテルを想像することで説明した．すでに満室になっているところに，新たに客が到着したとしよう．一見すると，新しい客はほかのホテルを探さなければならなさそうだが，ホテルの支配人は妙案を思いつく．支配人は，すべての宿泊客に部屋を空けて番号が1だけ大きい部屋に移るように頼む．すなわち，1号室の客は2号室に，2号室の客は3号室に，3号室の客は4号室に，というようにどこまでも続ける．客は全員が同時に移動する．これで，前からいた客全員に部屋を割り当てて，新しい客のために見事に1号室を空けることができた．

有限個の部屋しかないホテルではこううまくいかない．最大の番号の部屋にいる客には移り先がないからである．しかし，ヒルベルトのホテルには，最大の番号の部屋はないのだ．

---

*1　［訳注］邦訳は今野武雄・日田節次共訳『新科学対話(上)』(岩波書店，1937)による．

さらに次の二つの問題を考えてみるとよいだろう．

・満室になっているホテルに，座席番号が 1, 2, 3, … であるような，無限に多くの新たな客を乗せた列車が到着したとしよう．ホテルは，すでにいる客をうまく移動させることで，この新しい客を全員収容することができるだろうか．

・それでは，この無限に多くの客を乗せた列車が無限に多く到着したらどうだろうか．この場合も，それぞれの列車には，1, 2, 3, … と番号がつけられていて，その座席にも 1, 2, 3, … と番号がつけられているものとする．

グランディの無からの創造の証明

1703 年，ギドー・グランディは『無限の幾何学的曲線で表された円と放物線の求積法』を著した．その中で，グランディは次の無限級数を考えた．

$$1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots$$

二項定理によって，この無限級数は $1/(1+x)$ に等しい．ここで，$x=1$ とすると，

$$1-1+1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{2}$$

となる．一方，この級数の項を二つずつ組にすると

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+0+\cdots=0$$

となる．それゆえ，$0=1/2$ であり，グランディはこれを神が無から世界を創造した証明と解釈した．別の組分けにすると，

$$1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots = 1+0+0+\cdots = 1$$

であるから，0=1 となるので，これも等しく悩ましい．

解答と注釈

今日の数学の観点からすると，それほど多くの新しい概念を導入することなく，これらの例のほとんどを扱うことができる．そのいくつかはさらに議論が必要であり，続きはこのあとの章で行う．

最大の数

この考え方は明らかに間違っている．しかし，なぜ間違っているのか．一つの問題は，無限大が数であると仮定したことかもしれないが，今度は，数とは何かという疑問が生じる．この論証は，従来の数に対しては妥当であろうから，いかなる従来の意味においても ∞ は数にはなりえない．しかしながら，数学者は，無限大が(新種の)数になるような，標準的でない意味を定義した．「$\infty+1=\infty$」という主張は数学的には許容できるが，文脈を明確にするために別の記号を使うのが一般的である．許容できないのは，等式の両辺から ∞ を引くことである．なぜなら，通常の算術の規則が成り立ってほしければ，無限の量に対して引き算を定義できないからである．

正方形の対角線

この例の意味を理解するために，数学者は，無限へと近づく有限の段数 n を使ってこの論証を言い換える．洒落た言い方をすれば，

「有限だが，いくらでも大きくなる」ということだ．n の値がいくらであっても，階段の全長は 2 である．これにはきちんと定義された極限の曲線があり，それは実際には対角線である．しかしながら，ピタゴラスの定理によって，対角線の長さは 2 ではなく，$\sqrt{2}$ である．階段の極限は対角線ではなく，ジグザグな線が無限に何度も対角線と交わるという主張がなされることもある．しかし，そうではない．極限における曲線の長さは，階段の全長の極限ではない．ただ，それだけである．

円の面積

このやり方は正しい答えを出しているし，このようなことを正当化することもできる．アルキメデスは，取り尽くし法と呼ばれる古代ギリシアの方法を使って円の面積を求めたが，第 4 章で説明するように円にはきちんと定義された面積があることを証明なしに仮定した．今日では，通常，取り尽くし法に代わって微積分が用いられる．その考え方は，外側の縁をまっすぐにして三角形にした，すべてがまったく同じ形状と大きさの非常に薄い細切れを有限の n 個用いるというものだ．これは元の円をピッタリと覆っているわけではないが，それらを集めたものは円の面積を非常によく近似している．それぞれの三角形の面積は，底辺とそれに垂直な高さの積の半分である．したがって，総面積は，外周とそれに垂直な高さの積の半分である．外周は，円の周長である $2\pi r$ に非常に近い．垂直な高さは円の半径 r に非常に近い．したがって，総面積は $\frac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot r=\pi r^2$ に非常に近い．どれほど近いかを見積もるために，第 4 章で述べる微積分の論理的基礎を用いると，三角形の個数 n が無限に近づいたときの三角形の総面積の極限は正確に πr^2

になることが証明できる．この極限が，微積分における円の面積の定義であり，円の面積が存在するという前提を取り除くことができる．そのかわりに，このようなやり方で定義した面積は期待するような性質をすべてもつことを証明しなければならない．

電灯のスイッチ

数学的には，この手順は1秒より前のすべての時刻のスイッチの状態を定義している．しかし，1秒後のスイッチの状態については何も教えてくれない．すべての無限のプロセスに合理的な意味があるわけではなく，これはそのような一例である．

物理的には，すぐに光よりも速くスイッチを動かそうとすることになり，それは相対性理論によって不可能である．それよりも前に，摩擦によってスイッチは溶けてしまうだろう．それよりも前に，おそらく電球が焼き切れるだろう．

袋の中の玉

無限に多くのボールが入っている？　まあ，そう慌てずに！

ここでは現実的な問題は無視してほしい．これは，相対性理論のない世界での仮想的な問題である．数学的に意味があるように，状況設定を定式化することができる．

第 n 段階では，袋の中に $9n$ 個の玉が入っている．しかし，単に n を無限に近づけて，玉の「最終的な」個数が無限であると帰結することはできない．袋の中の玉の個数の極限は，極限における袋の中の玉の個数ではないのだ．この関係は，階段と正方形の対角線に似ている．

実際には，1秒後には袋の中にボールは一つもない．その理由

は，玉 n は第 n 段階で袋から取り出されて，決して袋に戻されることはないからである．すべての玉は袋に入れられ，わずかの間そこにとどまると，取り出されてしまう．この処理がすべて行われると，袋は空っぽになる．

$\frac{1}{3}$ の小数表記

無限小数には論理的な意味を正確に与えることができる．これについては，第 4 章を参照のこと．たしかに，

$$S = 0.333\,333\,333\cdots$$

とすると，

$$10S = 3.333\,333\,333\cdots = 3+S$$

である．それゆえ，$9S=3$，すなわち，$S=3/9=1/3$ である．

どの段階で止めてしまっても 1/3 より小さい数が生じるが，小数点以下の桁数を増やすほど，その数と 1/3 の差は急激に縮まる．いくらでも小さくなるその差の無限数列の極限は **0** である．しかし，けっして 0 にはならないことが，パラドックスを生じさせているように見える．

平方数と自然数

200 年後にカントルが無限集合を数える理論を展開するまでは完全には解決しなかった結論に，ガリレオがこれほど早く達していたというのは驚きである．これについては，第 7 章を参照のこと．カントルの見方を採用すれば，結局サルヴィヤチが言っていることのほとんどは，「等しい」「大きい」「小さい」が無限の量に対して