はじめに

この本は，「素数」の発見から「素数定理」の発見までの物語をわかりやすくまとめたものです．タイトルを『素数定理発見物語』としたほうが内容を正確に表しています．「素数」と聞いて抱く印象は人によって様々でしょう．ある人にとっては中学校あるいは高校の教室で聞いた「素因数分解」のおぼろげな記憶だったり，最近どこかで耳にした新しいメルセンヌ素数発見のニュースだったりするのでしょう．中には，カード番号などを含めた個人情報を守るために日夜生成されている，最新の暗号に使われている素数を思い浮かべる人もいるかも知れません．

人により印象は様々であっても，2, 3, 5, 7 が素数だということや，相変わらず急速に進化しているコンピューターや，格段に進化した最近の「パソコン」によって，ずいぶん大きな素数が見つかっていることくらいのことは，まず共通認識と言ってもよいでしょう．どちらにしても数学者にとっては大切な物らしいが，大方の人にとっては「日常生活にはほとんど無縁な少々素っ気ない数」だというくらいが一般的な所でしょうか．

この素数の様々な姿をわかりやすく，また読者諸氏の興味をそらさずに追ってみたい，というのが当初の私の希望です．かつてフェルマー，オイラー，ガウスといった大数学者たちが素数の秘密の解明に情熱を傾けた理由の一端が伝えられたら幸いです．かなり難しい定理も取り上げますが，一般の読者を想定して，難し過ぎる定

理の証明は省略し，また証明の一部をコラムに回すなどして，通読可能にするための努力を試みました．それでもなお難しいと感じる部分があったら，そこは読み飛ばしてください．そして後になって気になったときに，改めて読んでみてください．こんな読み方を繰り返していると，きっといつか「あっ，わかった！」という瞬間が訪れると思います．数学におけるこの「ヘウレカ体験」($\varepsilon\check{\upsilon}\rho\eta\kappa\alpha$[英語で(h)Eureka]は「わかった！」という意味の古代ギリシア語で，今は気息記号(h)を発音しないこともある)はとても大事です．

また，素数に関する豆知識のようなことを**素数のトリヴィア**というコラムで随所に加えました．そしてすばらしいアイディアの数々を，**すばらしいアイディア**というコラムで紹介しました．これらの中には少し骨のあるものも含まれています．「素数」という魅力的なテーマを巡って，有名・無名の数学者たちが頑張ってかちとってきたアイディアのいくつかを紹介するものです．読者の皆さんにとって，そのすばらしさが理解できるコラムの数が，少しずつでも増えていくことを期待しています．わかればわかるだけ，サブタイトルの「アイディアの饗宴」という言葉の重みが感じられると思うからです．この「饗宴」はある時はライヴァルとの「競演」であり，ある時は仲間との「協演」にもなります．「協演」と言えば，「双子素数」の研究において，これまでとは全く異なる新しい数学の研究スタイルが始まったことを最後の章の§19で紹介します．このような重層的な構成によって，素数の面白さ・不思議さが幅広い読者の方々に伝われば，著者の本懐これに過ぎるものはありません．

この本の元になったのは，著者が東京商船大学(現・東京海洋大学)時代に行った講義です．素数論を軸に，様々なテーマを取り上げ，最後はフェルマーの最終定理における $n=4$ の場合の証明で締

めくくるという講義でした．その講義録が編集者の目に触れて，大幅な書き直しを経て，「素数論」の部分をこのような形で本にしていただけることになりました．大変うれしいことです．私の講義に出席した多くの学生たちと，この講義録を読んでくださった岩波書店の加美山亮さんと猿山直美さんに深く感謝します．

2019 年 2 月 16 日　庭の春蘭を待ちながら

中 村　滋

目　次

すばらしいアイディア

序章　素数の不思議な世界

> 分解されることを拒み，常に自分自身であり続け，美しさと引き換えに孤独を背負った者．それが素数だ．（小川洋子「孤高の美しさ貫く「素数」」，朝日新聞のコラム「地球くらぶ」連載の最終回；2004.5.29.『犬のしっぽを撫でながら』(集英社)に再録）

§1　新しい素数の発見がニュースになった日

2016 年の 1 月，新聞の片隅に「最大の素数発見」の記事が載りました．よく読むと，何と 22338618 桁の「メルセンヌ素数」が見つかったというのです(メルセンヌ素数とは，2^n-1 の形で書ける素数のこと．詳しくは第 2 章)．きちんと読むのも大変なこんな桁数の大きな素数に，何か意味があるのかな？ と不審に思った方もいたに違いありません．小川洋子さんの『博士の愛した数式』(新潮社，2005)を読んでいた方は，これでまた 1 つ，大きな「完全数」が見つかったことになる，と思ったことでしょう．

確かにこれで人類は 49 個目の完全数を見つけたことになるのです．その桁数たるや，44677235 桁になります．25 行のノートの各行に細かい字で 100 桁ずつの数字をびっしり書いたとして，17871 ページが必要になります．こんな途方もない数は誰も書かないし，誰も読みませんね．辞書や百科事典を “読む”(必要な時に “引く” のではなく)方はいらっしゃるようですが，意味があるから，面白いから読み続けられるのであって，ほとんど意味のない数字の羅列は読むに値しないのです．小学館の『大日本百科事典』初版は本巻

18 巻で総ページ数 13832，イギリスの “Oxford English Dictionary” は全 20 巻で 21730 ページなのだということです．たった 1 つの完全数を書くだけで，大事典並のページ数を必要とするのですね．

少し調べてみると，じつは 2015 年の 9 月 17 日に，発見者のパソコンはこのメルセンヌ素数を見つけていたのですが，バグがあってこの発見が送信されず，定期点検のときまで気付かなかったのだそうです．発見者カーティス・クーパー(Curtis Cooper)は，大学ぐるみで数百台のパソコンを束ねて 1998 年頃から「メルセンヌ素数」探しに参加している「最大のメルセンヌ素数」ハンターです．過去にも 2005 年 12 月に 43 番目，翌年 9 月に 44 番目と，連続して「メルセンヌ素数」を見つけ，2013 年には 48 番目の「メルセンヌ素数」を見つけていました．今回の発見は，メンテナンス時に不具合が判明するまで，数百台の内の 1 台が探し当てていたことに気付かず，正月明けにあわてて発表したのでした．

この少々とぼけたところのあるクーパーは，現在フィボナッチ協会の公式ジャーナルである “季刊フィボナッチ(The Fibonacci Quarterly)” の編集長をしている人で，私もよく知っています．今回の発見で，スーパーコンピューター時代(1979〜96 年)に 7 つの「メルセンヌ素数」を見つけたスロウィンスキー(David Slowinski)，1952 年に初期のコンピューターで 5 つの「メルセンヌ素数」を見つけたロビンソン(Raphael M. Robinson)に次ぐ，4 つもの「メルセンヌ素数」の発見者になったのでした．どこからか貰った賞金は計算機センターに寄付したそうです．

これから 2 年ほど経って，2017 年 12 月 26 日にさらに大きなメルセンヌ素数が発見され，2018 年 1 月 3 日に素数であることの検証が終わったと公式に発表されました．こんどは 23249425 桁の

「メルセンヌ素数」で，これから作られる 50 個目の「完全数」の桁数は，46498850 桁です．発見したのは FedEx に勤めるアメリカの電気工学者ペース(Jonathan Pace)で，14 年探し続けた末のヒットでした．さらに，本書執筆の最終段階に，51 個目のメルセンヌ素数発見のニュースが飛び込んできました．2018 年 12 月 7 日に 35 歳の IT 専門家ラロシュ(Patrick Laroche)が発見し，21 日に他の人による 3 通りの検証で，素数であることが確認されました．これは 24862048 桁の「メルセンヌ素数」です．対応する 51 個目の「完全数」の桁数は，49724095 桁になります．彼は何年も GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search；世界中のパソコンをつなげてメルセンヌ素数を探すプロジェクト)のソフトを，コンピューターを作るときの「ストレス・テスト」に利用していましたが，最近 GIMPS 本来の目的であるメルセンヌ素数探しに参加しはじめました．そして参加してからおよそ 4 か月で今回のヒットにつながったのでした．何年も探し続けてヒットしない人が多い中で，とてもラッキーなことでした．古代から現在までに発見された「メルセンヌ素数」のリストは**素数のトリヴィア④**にまとめておきました．

　ところで古代ギリシア以来，素数は無数にあることが証明されていますから，「最大の素数」なるものは存在しません．ここで「最大」と言っているのは，「明確な形で書けている素数の内で最大」という意味です．面白いことに，これまでに見つかった 51 個のメルセンヌ素数は，例外なしに，古代ギリシアで証明された「定理」に述べられた形をしています(第 2 章参照)．これは驚くべきことですね．何しろこの古代の「定理」は，最初の 4 つの完全数(6, 28, 496, 8128)が書かれた文献が現れる 400 年も前の，紀元前 300 年

頃の出来事なのですから．人間理性は時折このようなすばらしい理論的な大ジャンプを見せるのです．

§2　素数は4000年以上前から知られていたらしい

古代数学史において最近大きな発見がありました．世界的なバビロニア数学史家の室井和男は近著『シュメール人の数学』(共立出版，2017)の中で，バビロニア数学以前のシュメール人の時代(BC2600〜BC2000年)に，すでに「素数の概念」があったことを示したのです．

19世紀の終わり頃から古代エジプト数学の内容が明らかになってきました．円周率πを$256/81$ ($\fallingdotseq 3.16049\cdots$)と捉えたこととか，四角錐体の体積を正しく計算していたことなどを知って，絢爛たる古代ギリシア数学に先行するすぐれた数学の存在がはっきりしたのです．

これよりも少し遅れて20世紀の1930年代からバビロニア数学の内容が次第に明らかになると，今度はそのレベルの高さに驚きが広がりました．そこでは2次方程式が根の公式によって自由に解かれていました．もちろん公式を書き表す手段はまだ存在しなかったので，条件を変えたたくさんの問題を同じ方法で解くことによって，実質的に根の公式で求めたのです．

また，$\sqrt{2}$の値が10進法に直すと小数点以下5桁まで正しく求められ(YBC7289)，45°から31°までほぼ1°ずつ変化する角度θに対する$\tan^2\theta$の値が数表(Plimpton322)にまとめられていました．この$\sqrt{2}$の値は，1辺が10 mの正方形の対角線の長さを，何と0.04 mmの誤差で測るという正確さで，現在の私たちにとって

も実用のレベルを超えています．まして，日干しレンガで家を建てていた3800年も昔のバビロニア人にとって，測定さえ不可能な正確さなのです．

20世紀の後半に，これらのことが広く知られるようになって，数学史の大幅な書き換えが行われたのでした．古代バビロニア数学の内容については，室井和男の旧著『バビロニアの数学』(東京大学出版会，2000)に詳述されています．

そのバビロニア数学が発展した同じ地において，それよりおよそ500年早く，シュメール人たちがメソポタミア文明の最初の担い手として登場します．もう少し正確に言うと，ギリシア人が両河(ポタミア)の間(メソ)(メソ・ポタミア)と名付けたエウフラテス河とティグリス河にはさまれた地帯の北部領域はアッシリアと呼ばれ，南部は後の大帝国に因んでバビロニアと呼ばれています．その南部領域バビロニアが，北側のアッカドと南側のシュメールにわかれるのです．あのピラミッドに象徴される強力な国家を作り上げた古代エジプトとは対照的に，肥沃な土地に多数の小さな都市国家が競合しあう所でした．

世界で最初の文字を工夫した彼らシュメール人は，土地の面積や，麦の収穫・保管，灌漑工事などについて，膨大な計算を実行して記録に残しました．まとまった数学文書が存在しないために，室井は，残されたこれらの数字の羅列に踏み込むことによって，少しずつシュメール人の数学の内容を明らかにしてきて，ついに前述の著書にまとめたのでした．その結果，ピュタゴラスの定理はすでにシュメール人に知られていて，円周率も3+1/8が知られていたということです．さらに驚いたのは，3+1/7の方が良い値であることがわかっていたのに，60進法になじまなかったので，3+1/8を使ったのだろうという推測です．

また,「素数」の概念もすでにこの時代にあったと推測しています.素数は掛け合わせることによってどんな整数でも作ることができますから,たくさんの計算が行われて初めてその存在に気づくものなのです.「計算好きのシュメール人」(前川和也の表現)と言われるほど,飽きもせずにたくさんの計算を行ったシュメール人だったからこその発見と言えるでしょう.20世紀にバビロニア数学のレベルに驚いた私たちは,今度はシュメール人の数学のレベルに驚かされるのです！ 「バビロニア数学とシュメール人の数学の違いは,2次方程式を根の公式で解いたかどうかだ」という室井の指摘には真実驚かされました.

素数のトリヴィア 1

やっかいな素数「7」

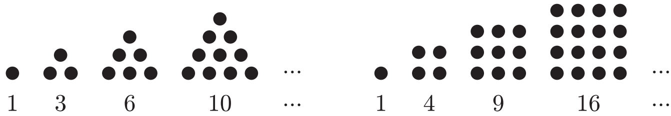
メソポタミア文明においては,紀元前2000年以前のシュメール人たちの時代から60進法が使われていました.大麦の播種と収穫に関係しているのですが,室井著『シュメール人の数学』によると,1年365日と深く結びついているようです.神にささげる祭りの日を除いて360日,角度で見ると,1日にほぼ1度ずつずれて1年でちょうど元に戻ります.これを1か月30日,1年12か月としたのが古代の暦で,円を6等分して60°にしたのが60進法の起源でした.約数の多い60進法は理論的にはとても便利です.10進法だと約数は2と5だけですが,60進法では2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30とたくさんあります.割り算をした時にきれいに割り切れる数が多いのです.そのときに,初めて割り切れない数が7で,とても厄介な数でした.だからこそ7は人間の力では計り知れない神聖な“神秘数”としてシュメール時代から神話にも現れるのです.古代エジプトの数学書「リンド・パピルス」にも7に因んだ問題が現れ,また新約聖書の『ヨハネ黙示録』に54回も「7つ」と「7人」が出てくるのは,おそらくシュメールの迷信が基になっているのだろう,と室井は推察しています.

§3　初期ギリシア数学における素数

紀元前 5 世紀の中頃から，古代ギリシアにおいて数学は大きく変容します．生活に必要な計算を実行するだけではなく，経験から得られた事実を一般的に成り立つ「定理」の形にまとめ，それを厳密に「証明」するという態度が芽生えたのです．また，たとえば「$\sqrt{2}$ の値が整数比では表せない」ということも「証明」しなければいけないことになりました．今から 3800 年も昔に古代バビロニアにおいて，10 進法に直すと小数点以下 5 桁まで正しく求められ，望むならばさらに近似を進めることができたはずの $\sqrt{2}$ ですが，その値が整数比で表せるかどうか，などという発想は彼らには一切なかったのです．当時の最高のインテリだったバビロニアの書記官は，とにかく正確な計算とそれを正しく記録することだけを心掛けていたのでした．

そこに一風変わった人たちが登場します．アゴラ(都市の広場)に集まって，とことん議論することですべての事を決めていった古代ギリシア人です．政治談義，哲学談義，裁判談義，などと共に，数学も議論の対象になりました．衆人環視の中で議論をして相手を納得させるために，論理力を鍛え，言葉の使い方を工夫し，疑問点を残さないように細かいところまで気を遣うということが日常生活で繰り返し行われていたのです．

ピュタゴラス派の数論(プセーポイ数学)は，小石(プセーポイ)を並べて数の性質を見つけました．たとえば，小石を正三角形および正方形の形に並べると，

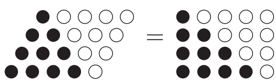


となって，**三角数**(triangular number) 1, 3, 6, 10, … と **四角数**＝**平方数**(square number) 1, 4, 9, 16, … が出てきます．n 番目の平方数を s_n と書くと，明らかに $s_n=n^2$ となります.「square」とは元々「正方形」という「形」を表す言葉でした．小石を並べた古代ギリシア人のおかげで，それがそのまま「平方数」を表す言葉になったのです．

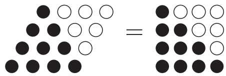
三角数の一般公式はこれほど簡単ではありません．n 番目の三角数を t_n と書くと，

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 1+2, \quad t_3 = 1+2+3, \quad t_4 = 1+2+3+4, \quad \cdots,$$
$$t_n = 1+2+3+\cdots+n, \quad \cdots$$

となります．同じ大きさの三角数を 2 つ並べて，1 つは上下を逆にします(次図)．傾きをまっすぐに並べ直すと，

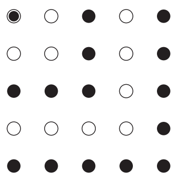


と，長方形に小石が並びます．一般的に書くと $t_n+t_n=2t_n=n(n+1)$，ゆえに $t_n=n(n+1)/2$ となることがわかります．これが三角数の一般公式です．次に 1 つだけ大きさの違う三角数を，小さい方を上下逆さまにして並べて，傾いた小石をまっすぐに並べ直すと次のようになります：



右側は正方形の形に小石が並んでいますから平方数で，$t_n+t_{n-1}=s_n=n^2$ となるのです．

小石を並べて次々に新しい関係式を見つけたばかりか，「ピュタゴラスの 3 つ組(Pythagorean triple)」と呼ばれる「直角三角形の 3 辺をなす自然数の組」が無数にたくさん存在することを次のようにして「証明」していました．次図のように，左上の小石(◉) 1 個から始めて，小石を順次カギ形(⌟)に並べると，その度に一回り大きな正方形ができます：



$1 = 1^2$

$1+3 = 4 = 2^2$

$1+3+5 = 9 = 3^2$

$1+3+5+7 = 16 = 4^2$

$1+3+5+7+9 = 25 = 5^2$

小石の個数を数えて，次の見事な一般公式が得られます：

$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$

つまり，「奇数を 1 から順に加えると，奇数の個数の 2 乗に等しくなる」のです．

次にこの内の 2 つの式を並べます．

$$1+3+5+7 = 16 = 4^2$$

$$1+3+5+7+9 = 25 = 5^2$$

ここで最後に加えた奇数 9 を 3^2 と書き直して，

$$(1+3+5+7)+9 = 4^2+3^2 = 5^2$$

順序を変えると有名な式，$3^2+4^2=5^2$ が出てきます．$25=5^2$ まで奇数を加えたところで同じことをすると，

$$1+3+5+\cdots+21+23 = 144 = 12^2$$

$$1+3+5+\cdots+21+23+25 = 169 = 13^2$$

となって，$12^2+5^2=13^2$ となります．次は $49=7^2$ で同様に，$24^2+7^2=25^2$ が得られます．一般的に書けば，$(2n-1)^2=2\{2n(n-1)+1\}-1$ と書き直すと，$1+3+5+\cdots+(2n-1)^2=\{2n(n-1)+1\}^2$ がわかりますから，$\{2n(n-1)\}^2+(2n-1)^2=\{2n(n-1)+1\}^2$ となります：すなわち $(2n-1,\ 2n(n-1),\ 2n(n-1)+1)$ がピュタゴラスの 3 つ組になることがわかったのです．

一般論をこのように書くと，とても難しそうに見えるかもしれません．しかし，$\{2n(n-1)\}+\{2n(n-1)+1\}=4n^2-4n+1=(2n-1)^2$ ですから，奇数の 2 乗を 1 だけ異なる 2 つの自然数の和に直せば，初めの奇数とこれら 2 つの自然数がピュタゴラスの 3 つ組になるのです．たとえば，$3^2=4+5$ だから，$(3,4,5)$ がピュタゴラスの 3 つ組になり，$7^2=49=24+25$ より，$(7,24,25)$ がピュタゴラスの 3 つ組になるのです．これなら簡単ですね．こうしてピュタゴラスの 3 つ組が無限にたくさんあることが示されました．

古代ギリシア人は「三角数」，「四角数」などの「図形数」とは別のやりかたでも自然数を分類しています．小石を並べて長方形の形にきれいに並べられるかどうかで「第 1 の数」，「第 2 の数」と分けました．たとえば 7 個と 8 個の小石を並べてみましょう．7 個の小石は