

まえがき

皆さんは、子どもの算数の間違いについて、理由を考えたことがありますか？

私は大学の数学科に勤める教員、いわゆる数学者です。子どもが3歳ぐらいのときから、子どもと一緒に算数を考えることを楽しむようになりました。

子どもが算数の問題を考えていると、こちらの想定から完全に外れたところをつまづくことがあります。また、突拍子もない発想、そして間違いもよくあります。しかし、子どもの様子をよく観察していると、子どもの発想は案外奥が深い気がします。間違っているときも、なぜそんな誤答が出てくるのか、推理を巡らせた末に意味がつき、子どもは子どもなりに理路整然と考えていることが分かったりします。

算数に限らず子どもの言動は、一見意味不明でも、よく聞き出すと、子どもなりに一貫した考えや理由をもっていることがありますよね。「ああ、そんなことを考えていたのか」と、驚きながら納得されたことは、お子さんをおもちの方ならどなたも経験のあることと思います。算数では、それはどのような形をとるのでしょうか？

子どもが、時計が読めるようになって少し経った頃のことです。11時の1分前がいつか分かるかと思って聞いてみたら、

子どもはしばらく考えたのち、「10時69分」と答えました。こんなとき、皆さんはどう思いますか？

69分なんて時刻ないでしょ！ と思いましたが、少し考えた上での返答だったなと思い直して、子どもの頭の中で何が起きたのか、想像を巡らせてみました。すると、今のこの子にとってはなかなか難しい問題で、子どもなりに頭を使ったのだな、と見当がつかしました。何をどう考えると10時69分なんて答えが出てくるのか、よければちょっと考えてみてください。この出来事は、第6話で取り上げます。

より幼い時期に、わが子が遭遇した「とっておき」の問題を、もう少しご覧に入れましょう。

- 23の次は24か42か
- 30×5 はいくつか
- 半分の半分は、4分の1か3分の1か

——いったいこれの何が問題？ と、書いている私ですら思ってしまいそうです。しかしどれも、ある時期のわが子にとって大問題で、ここから多くを学んだのです。

本書では、このような「素朴で易しい」算数の問題について、子どもが考えあぐねたり誤った答えを出したりしている場面を取り上げ、数学者からはどう見えるのか、言葉で形にしたいと思います。上記の3つの問題については、それぞれ本書の第6話、第8話、第9話で扱いました。算数の内容を網羅するわけではありませんが、日々の出来事の中で私が特

に興味深いと感じたものを選び、丁寧に解きほぐします。第4話では私自身の幼少期のエピソードも取り上げます。

第7話では少し趣向を変え、「かけ算の順序問題」とよばれる、ときに議論をよぶ算数の話題を考えています。これは子どもを見ていて、かけ算の概念の深みや広がりについて、多くを感じたことがきっかけです。結びでは、「誤り」が学びの中で果たす役割について改めて考えます。

多く個人的な経験を綴っていますが、全体として、一見誤りである子どもの思考の局所的な正確さやその機微、また単純で平易に思える算数の意外な奥深さを描き出そうと試みました。

子どもの考えていることが分かれば、接し方も変わります。お子さんと接する上で何かヒントにさせていただいたり、算数の基礎的な概念を再検討する一助にさせていただいたりできればと思っています。各話の内容は独立しているので、どこから読み始めていただいても大丈夫です。

では、不思議で魅力ある子どもの算数の世界に出発しましょう！

目次

まえがき

第1話	イジワル問題	1
	イジワル問題遊び／不思議な「ごっこ遊び」／イ ジワル問題の奥に／課外学習	
第2話	九九表	13
	トイレと九九表／九九表のパターン／表を気長に 見ていると／スコレー／[コラム]緑表紙の図	
第3話	マルとペケ	25
	道すがらのたし算で／テスト／式の意味・式の意 図／教科書では／[コラム]700+900=1060につ いて	
第4話	電卓を通して見る数	37
	おもちゃになった電卓／自分流「マイナスの数理 論」／思わぬ副作用？／その後／数の理解	
第5話	子どもの世界	53
	世界観／5+1事件／基数と序数／解き方は変わ るか／ヒャクニエン事件	
第6話	事件簿	65
	24と42事件／11時の1分前事件／250ミリは 何センチ事件／11×11と12×12事件	

第7話 かけ算の順序・かけ算の種類 78

かけ算の順序問題とは／かける数とかけられる数
／かけ算の種類は？／個数と累加／連続量と倍／
小数のかけ算・割合／比例／複比例／自然科学、
社会科学、日常でも

第8話 理論と術 102

アルバムのポケット／かける10／理論と術／ト
ワイライトエクスプレス／コーヒーを買いに／布
団をたたむと

第9話 ストーリーが紡がれるとき 118

ページ数で数遊び／パンと分数／数学者も同じ／
姉弟で算数

結び——誤りは宝物 127

試行錯誤と数学者の日常／誤りの面白み／誤りと
思考形式／過渡的な理解／誤りを見守る

付録——第7話の補足 137

あとがき 143

謝辞 145

第1話 イジワル問題

イジワル問題遊び

小学1年生になった子どもが10月頃、「イジワル問題」という算数の遊びを始めた。家で「ねえパパ、1たす1は？ただしこれはイジワル問題！」と聞かれる。この場合、答えは2でなく、11が正解になる。

種明かしをしたらオシマイ、ということではなく、何度も練習するものらしい。2+1なら21、1+4+2なら142、のように類題がたくさん出る。また、このイジワル問題はルールが厳格で、正解は1つしかない。繰り返しに飽きてきた頃、ために1+1にヒャクイチと答えてみたら、それは間違いだとはっきり言われた。2+1をジュウニと答えたら、これも明確に間違いだそうで、正解は21以外にはありえないようである。そして出題側は、それがイジワル問題かどうかを明言する必要



があり、イジワル問題でない場合は1+1を2と答えなければならぬ。

この厳格さに私は興味をひかれた。学校で流行っているらしく、このルールそのままに友達と遊びに興じている様子が見えかけた。

どうやらこの「遊び」には知的に重要な意義がありそうだ、と思い至ったのは、初めて子どもに問いかけられてから2カ月ほど経ったある日のことである。

不思議な「ごっこ遊び」

しばし、元となった背景話にお付き合いいただきたい。4歳から5歳ぐらいの間、娘は「ごっこ遊び」が好きで、私はよく相手をさせられた。毎度いろいろな設定で、私と子どもは動物の兄弟だったり、仲の良い友達だったり、はたまた私が母だったり、子どもの方が親で私は空腹でお菓子をせがむ子ども役だったり、いろいろである。

いわゆるロールプレイ、役割演技である。とは言っても、自分がお姫様になるようなメルヘンチックな設定は一度もなく、生活の一部を取り出してフィクションにしたものがほとんどだった。子どもの用意する細かい設定に沿って話すのは実のところ結構面倒だったが、これが子どもの一番好きな遊びなので仕方がない。入浴時など手の空いているときはなるべく相手をしてやった。

そんなごっこ遊びの中で、少し変わったシーンがあった。それは、『両親を亡くした幼い子どもが、少し年上の知り合いと一緒に暮らしてくれるよう頼み、生活を始める』というシーンである。娘は両親を失った子ども役、私は年上の知り合い役である。会話はたとえば次のように進む。

「わたし、お父さんもお母さんも死んじゃったの。ひとりぼっちなんだけど、わたしのおうちで一緒に暮らしてくれない？」

「そうなの。お父さんもお母さんもいないの？」

「そう、お父さんもお母さんも病気で死んじゃったの」

「それはかわいそうに。いいよ。一緒に暮らそう」

「ありがと～」

——この後は、一緒に寝るとか食事を作るとか、何か日常生活のひとコマが始まる、という流れである。

多少のバリエーションはあるが、『両親を失った子どもと少し年上の知り合い』という設定は共通で、ある程度の期間にわたって何度もこれをやらされた。

実の親としては、わが子に「お父さんもお母さんも死んじゃった」と言われるので、少し妙な気分になる。そこで、「そんな悲しいことは考えなくていいよ。ほら、パパもママも元気でしょ」と諭そうかと思ったが、このとき、子どもの通う幼稚園の園長先生の言葉を思い出して、それはやめることにした。

* * *

その先生は炭谷俊樹さんという方で、長年にわたって幅広い層の人材育成に心を砕いてきた、「探究型教育」の専門家である。私設の学校ラーンネット・グローバルスクールの代表であるとともに、現在は神戸情報大学院大学の学長もなさっている。そのとき思い出した炭谷先生の言葉は、「子どものすること、考えることにはすべて理由があります」という一言だった。

わが子の卑近な例では、夜9時過ぎ、どれだけ言っても歯磨きをしないので理由を聞いたら、おなかがベコベコだというのがあった。歯磨きをしないまま時間が過ぎ、寝るのが遅れていたので、さっさと磨いてもらいたいというのが私の気持ちだったが、子どもとしては空腹で寝られそうにないということだったらしい。子どもは茶碗一杯のご飯にふりかけをかけてぺろりと平らげ、その後すぐに歯磨きをしてご機嫌で眠りについた。

歯磨きをするかしないかでぶつかって話が進まないなか、歯磨きをしない頑なさが普段と違うなと思って聞いてみたら、こんな展開であっさりと解決に向かった。日々の生活で子どもとぶつかることは少なくないが、炭谷先生の先の言葉を意識していると建設的に解決できることがあり、この言葉は、私が子どもと接するときの指針になっている。

* * *

でもなぜ、両親を亡くすなどというごっこ遊びが必要なのだろうか。子どもの周りにこんなことを吹き込む人物がいるようにはどうも思えない。あるとき自分で思いついたに違いない。何度も繰り返すので気まぐれではない。そんな話を持ち出して親がどんな反応をするか見たいといったわけでもなさそうだし、かと言って突然何かの心の問題を抱えたような気配もない。

しかし子どもの様子をうかがうにつけ、子どもにとってはどうも何か意味があり、それは尊重した方がよいような感じがする。「子どものすること、考えることにはすべて理由がある」は果たしてこの場合にもあてはまるのだろうか。長らく理由は謎だったが、ある日ふと、幼児の心理を解説した本で何だか似たような話を読んだことを思い出した。

その本に、死んだアヒルの真似をする子どもについて考える箇所がある。子どもはソファーに横たわって脚を折り曲げ、体にぴったりと手をつけてじっとして、死んだアヒルの真似をする。その本によれば、このようなふりをする遊びは、情緒的な補償や願望の充足、そして葛藤の清算に役立つという。

恐ろしい場面も、現実には起こりえないことを遊びのなかですることで、その恐ろしさを中和し、自分なりに受容できるようになる効果がある。子どもにとって死んだアヒルの真似は、死というものを受容するプロセスなのである。

* * *

このころ娘はちょうど、身の回りには多くの生命とその死があることを発見する日々を送っていた。

身近にさまざまな昆虫がいる。青虫は草木の葉を食べ、鳥がその青虫を食べる。セミがうるさく鳴く一方で、道端にはセミの死骸が落ちていて、それに蟻が集まる。血を吸う蚊を叩く。食卓に1匹の姿のままの魚があがる。プランターに植えた花は水と太陽光で日々成長し、水をやらなければ枯れる。親にも親がいてそれが祖父母であり、祖父母にもまた親がいることを理解するが、私の娘の場合、曾祖父も曾祖母ももう帰らぬ人となっていることを知る。

となると、娘本人も、そしてまた親も、命をもち、死にうる存在であるということが、どうやっても帰結されるしかない。仮に今は健康そうだとしても、高いところから落ちたり車にまともにはねられたりしたら、大人だって死んでしまうということは、子どもにも想像がつく。子どもの生活は精神的にも物質的にも保護者に強く依拠しているから、保護者を失うことは子どもにとっては大きな危機である。

親が死にうる存在であるという、深刻だが変えようのない事実をどう受容していくか。素人が心理学的な話を展開して恐縮だが、私の娘の場合、それを時間をかけて段階的に受け入れていくプロセスが、『親を亡くした子どもの生活』というごっこ遊びだったということで間違いないだろうと、いま私は考えて

いる。

この設定のごっこ遊びはある程度長く続いたが、やがて頻度が減り、いつの間にかなくなっていた。恐ろしさを中和しながら、オブラートに包むようにして心に受け止めたのだろう。何にインスピレーションを受けて子どもがこのごっこ遊びを考えだしたのか分からないが、この着想は、人間の精神に内在する知恵のしなやかなはたらきを、私に強く感じさせるものとなった。

イジワル問題の奥に

算数からずいぶん離れたところに来てしまったが、このあたりで「イジワル問題」の話に戻りたい。あるとき私はふと、このイジワル問題遊びにも、類似のメカニズムがあるのではないかと思い至った。先ほどの両親を失うごっこ遊びと違い、情緒的というよりは認知的なものであるが、これは位取りの記法や十進法を受け入れ、理解しようとする精神のはたらきから編み出された遊びであると、今では考えている。

* * *

たとえば23という数を考えよう。これは表記上2と3からできているが、2と3の和というわけではない。では23とは何か。

23と書いたときの2を考えると、これは20を意味してい

る。言い換えると、2は、10が2個という意味の2である。表記23が表す数は、10が2個と1が3個の総計である。式で書けば

$$\begin{aligned} 23 &= 10 \times 2 + 1 \times 3 \\ &= 10 + 10 + 1 + 1 + 1 \end{aligned}$$

である。これが位取りの記法で表された23という数の意味である。

どんな教育方法を用いても、幼児がこの位取りの記法、そして十進法を理解するのは大変難しいそうだ。私も娘と算数をするなかで、その難しさはしみじみと思い知らされた。

23の次が24と42のどちらになるか分からずに混乱していたのは、4歳のときだった。5歳か6歳の頃、100ずつのまとまりを数えていく問題をやった。百^{ヒヤク}、二百^{ニヒヤク}、三百^{サンヒヤク}、……、九^{キユウヒヤク}百^{セン}、千^{セン}まではよかったが、次は千^{セン}百^{ヒヤク}にならず二千^{ニセン}になる。そのまま聞いていると、三^{サン}千^{ゼン}、四^{ヨン}千^{ゼン}、……、九^{キユウ}千^{ゼン}、一^{イチ}万^{マン}と進んだのち、次は二^ニ万^{マン}になる。7歳の頃に、「10を45個集めた数はいくつですか？」という問題に405という答えを書いて、「間違ってるんじゃない？」と言ってみてもしばらく誤りに気づかなかった。

先ほど23を例にとったが、231ならどうだろうか。これは100が2個、10が3個、1が1個ということで、式で書くと

$$\begin{aligned}
 231 &= 100 \times 2 + 10 \times 3 + 1 \times 1 \\
 &= 100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 1
 \end{aligned}$$

となる。23の右に1がくっついて231になったら、2も3も意味が変わったことになる。

考えてみれば、これはなかなか難解な規則ではないだろうか。比較すると明らかになるが、ローマ数字では2, 23, 231はそれぞれ

$$\begin{aligned}
 2 &\dots \text{II} \\
 23 &\dots \text{XXIII} \\
 231 &\dots \text{CCXXXI}
 \end{aligned}$$

と表される。ローマ数字のI, X, Cが表す数は、その位置とは関係なく決まっていることが分かる。いくつかのものをまとめて表したいとき、私たちは普通、言葉をそのまま連ねている。「手足」や「草木」, 「白黒」や「春夏秋冬」などのように。ローマ数字の表記法はこれと同じだ。

これと異なる231のような算用数字の位取り記法は、簡素で実用性と発展性に優れるが、引き換えにある種の難しさを宿すことになってしまった。位取りの記法は、記号0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9だけでどんな自然数も短く表すことができるなど高い潜在力をもつ代わりに、理解のハードルが高い。2と23と231とで、2の意味するものはすべて異なるのだ。

* * *

1+1が11になるイジワル問題は、位取り記法の抱えるこの難しさに焦点を当てている。正課の算数や日々の生活で目にする数表記は、子どもの原始的な直観とは合わない。それを受け入れ、理解しようとする精神のはたらきが、このような形で顕れているのではないだろうか。

傍目に見る限り、娘はこれを勉強だとは捉えていない。やりたくなったときに、遊びとして面白がってやっているだけだ。本当に、純粹に子どもどうしの冗談として行われることも多いだろう。それでも、ルールが厳格なのは冒頭に述べたとおりで、勝手な変更は認められていない。また、内容は少しずつ発展し、今では10+1が百一ヒャクイチとか、10+10が千十センジュウとか、大人でも一度は数字を頭の中で並べてみないと答えられない問題も出る。じゃあ101+10ならどうだろうと思って聞いてみたら、それは今でもよく分からないようだった。



課外学習

子どもにルーツを聞いたら、同級生 A ちゃんに教えてもら