

物理入門コースについて

理工系の学生諸君にとって物理学は欠くことのできない基礎科目の1つである。諸君が理学系あるいは工学系のどんな専門へ将来進むにしても、その基礎は必ず物理学と深くかかわりあっているからである。専門の学習が忙しくなってからこのことに気づき、改めて物理学を自習しようと思っても、満足のゆく理解はなかなかえられないものである。やはり大学1~2年のうちに物理学の基本をしっかりと身につけておく必要がある。

その場合、第一に大切なのは、諸君の積極的な学習意欲である。しかしながら、物理学の基本とは何であるか、それをどんな方法で習得すればよいかを諸君に教えてくれる良いガイドが必要なことも明らかである。この「物理入門コース」は、まさにそのようなガイドの役を果すべく企画・編集されたものであって、在来のテキストとはそうとう異なる編集方針がとられている。

物理学に関する重要な学科目のなかで、力学と電磁気学はすべての土台になるものであるため、多くの大学で早い時期に履修されている。しかし、たとえば流体力学は選択的に学ばれことが多いであろうし、学生諸君が自主的に学ぶのもよいと思われる。また、量子力学や相対性理論も大学2年程度の学力で読むことができるしっかりした参考書が望まれている。

編者はこのような観点から物理学の基本的な科目をえらんで、「物理入門コ

ース」を編纂した。このコースは『力学』、『解析力学』、『電磁気学 I, II』、『量子力学 I, II』、『熱・統計力学』、『弾性体と流体』、『相対性理論』および『物理のための数学』の8科目全10巻で構成されている。このすべてが大学の1,2年目の教科目に入っているわけではないが、各科目はそれぞれ独立に勉強でき、大学1年あるいは2年程度の学力で読めるようにかかれている。

物理学のテキストには多数の公式や事実がならんでいることが多く、学生諸君は期末試験の直前にそれを丸暗記しようとするのが普通ではないだろうか。しかし、これでは物理学の基本を身につけるどころか、むしろ物理嫌いになるのが当然というべきである。このシリーズの読者にとっていちばん大切なことは、公式や事実の暗記ではなくて、ものごとの本筋をとらえる能力の習得であると私たちちは考えているのである。

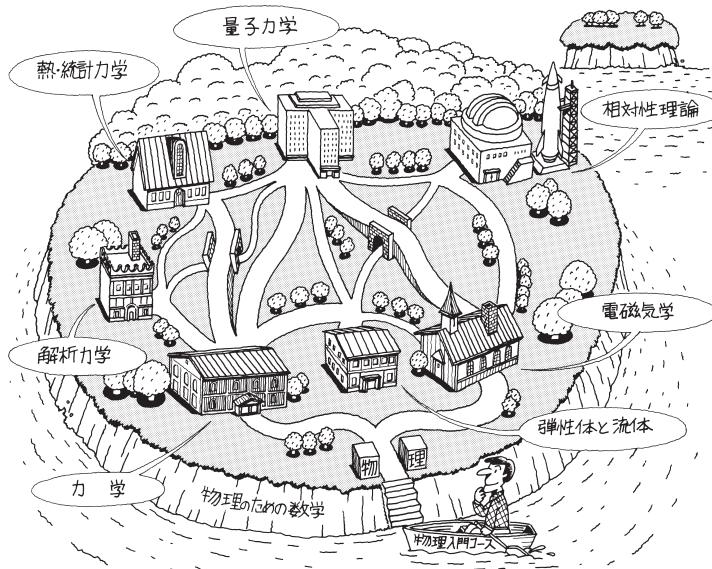
物理学は、ものごとのもとには少数の基本的な事実があり、それらが従う少數の基本的な法則があるにちがいないと考えて、これを求めてきた。こうして明らかにされた基本的な事実や法則は、ぜひとも諸君に理解してもらう必要がある。このような基礎的な理解のうえに立って、ものごとの本筋を諸君みずから努力でたぐってゆくのが「物理的に考える」という言葉の意味である。

物理学にかぎらず科学のどの分野も、ものごとの本筋を求めているにはちがいないけれども、物理学は比較的に早くから発展し、基礎的な部分が煮つめられてきたので、1つのモデル・ケースと見なすことができる。したがって、「物理的に考える」能力を習得することは、将来物理学を専攻しようとする諸君にとってばかりでなく、他の分野へ進む諸君にとっても大きなプラスになるわけである。

物理学の基礎的な概念には、時間、空間、力、圧力、熱、温度、光などのように、日常生活で何気なく使っているものが少なくない。日常わかったつもりで使っているこれらの概念にも、物理学は改めてややこしい定義をあたえ基本的な法則との関係をつける。このわずらわしさが、学生諸君を物理嫌いにするもう1つの原因であろう。しかし、基本的な事実と法則にもとづいてものごとの本筋をとらえようとするなら、たとえ日常的・感覚的にはわかりきったこと

であっても、いちいちその実験的根拠を明らかにし、基本法則との関係を問い合わせることが必要である。まして私たちの日常体験を超えた世界——たとえば原子内部——を扱う場合には、常識や直観と一見矛盾するような新しい概念さえ必要になる。物理学は実験と観測によって私たちの経験的世界をたえず拡大してゆくから、これにあわせてむしろ常識や直観の方を改変することが必要なのである。

このように、ものごとを「物理的に考える」ことは、けっして安易な作業ではないが、しかし、正しい方法をもってすれば習得が可能なのである。本コースの執筆者の先生方には、とり上げる素材ができるだけしづらり、とり上げた内容はできるだけ入りやすく、わかりやすく叙述するようにお願いした。読者諸君は著者と一緒にになってものごとの本筋を追っていただきたい。そのことを通じておのずから「物理的に考える」能力を習得できるはずである。各巻は比較的に小冊子であるが、他の本を参照することなく読めるように書かれていて、



決して単なる物理学のダイジェストではない。ぜひ熟読してほしい。

すでに述べたように、各科目は一応独立に読めるように配慮してあるから、必要に応じてどちらから読んでもよい。しかし、一応の道しるべとして、相互関係をイラストの形で示しておく。

絵の手前から奥へ進む太い道は、一応オーソドックスとおもわれる進路を示している。細い道は関連する巻として併読するとよいことを意味する。たとえば、『弾性体と流体』は弾性体力学と流体力学を現代風にまとめた巻であるが、『電磁気学』における場の概念と関連があり、場の古典論として『相対性理論』と対比してみるとよいし、同じ巻の波動を論じた部分は『量子力学』の理解にも役立つ。また、どの巻も数学にふりまわされて物理を見失うことがないように配慮しているが、『物理のための数学』の併読は極めて有益である。

この「物理入門コース」をまとめるにあたって、編者は全巻の原稿を読み、執筆者に種々注文をつけて再三改稿をお願いしたこともある。また、執筆者相互の意見、岩波書店編集部から絶えず示された見解も活用させていただいた。今後は読者諸君の意見もききながらなおいっそう改良を加えていきたい。

1982年8月

編者 戸田盛和
中嶋貞雄

「物理入門コース／演習」シリーズについて

このコースをさらによく理解していただくために、姉妹篇として「演習」シリーズを編集した。

- | | |
|--------------|----------------|
| 1. 例解 力学演習 | 4. 例解 熱・統計力学演習 |
| 2. 例解 電磁気学演習 | 5. 例解 物理数学演習 |
| 3. 例解 量子力学演習 | |

各巻ともこのコースの内容に沿って書かれており、わかりやすく、使いやすい演習書である。この演習シリーズによって、豊かな実力をつけられることを期待する。（1991年3月）

はじめに

古典力学の基礎方程式は質点に対するニュートンの運動方程式 $F=ma$ である。惑星の運動や放物体のような場合にはこのままでよいが、もっと一般の力学系にこれを適用しようとするときには、いろいろな工夫をこらさないとどうてい問題を解くことができない。そこで、「剛体」への応用については本コース第1巻の『力学』で、「流体」の扱い方については第8巻『弾性体と流体』で述べられているような方法が確立されたわけである。これに対し、本書で扱う解析力学というのは、剛体力学や流体力学のように扱う対象の性質による分類ではない。対象は一般的であるが、方法が「解析的」なのであり、系の運動を数学的にどう記述すると計算に便利か、ということに考察の重点が置かれる。

運動を記述するためには、時間の関数として変化する「座標」が必要である。解析力学でいちばん重要なことは、直交直線座標(デカルト座標)を離れて、できるだけ便利な変数を自由に選定することにある。それがラグランジュの一般化座標である。変数をそのように選んだ場合に、運動方程式はどんな形になるか。座標のとり方によって異なるその形を、問題ごとにいちいち考えて導き出すのははなはだわざらわしい。その手間を1回ですませ、万能で一般的な処方箋を提供してくれたのが、ラグランジュの運動方程式である。ラグランジュの方法が素晴らしいのは、適当な座標を選びさえすれば、それからあとはまったく

「機械的に」計算を進めることができる点にある。物理学でもっともむずかしいことの1つは、自然現象を数式化するときに、どのような表わし方をしたらよいかということであろう。力学に関して、その難所をやすやすと通してくれるのが、ラグランジュの方法である。これこそ数学的手段による「思考の節約」の典型的な例であるとして、エルンスト・マッハが絶賛した(24ページ参照)のも当然である。

しかし、いくら機械的に使えばよいからといって、中がまったくブラックボックスのコンピューターのように、わけもわからずに使うというのでは困るし、誤りもおかしやすい。本書の第1章の主目的は、ラグランジュの方程式がニュートンの方程式からどのようにして導き出されるかの説明である。これをしっかりと理解したうえで、第2章でラグランジュの方程式の実例に触れてそれになじみ、自ら自由に使いこなせるようにすることが必要である。

このように実用に重きを置くラグランジュの力学にくらべると、第3章と第4章で展開される諸理論は、むしろ形式的な議論であって、力学の問題を解くという見地からすると、はなはだ実用性に乏しい。天文学の細かい計算には役立ったかもしれないが、そういう一部の専門的な場合を除くと、実利的な御利益はほとんどないといってよい。しかし、力学という学問体系の論理の骨組みを見なおし、古典力学と統計力学や量子力学との橋渡しをするうえで、このような考え方が歴史的にきわめて重要な役割を果たしたのである。その意味で、これから物理学をやや専門的に学ぼうとする人にとっては、一度は通っておかなければならぬ関門である。

最後の第5章では、話は再び具体的な問題に戻り、採用する方法も第1章と第2章で展開されたラグランジュの方程式である。読者は第3章と第4章をとばして、第2章から第5章へ進んでも、完全に理解できるようになっている。運動のなかでも非常に重要度の高い微小振動の一般論は、諸方面への応用も広いのであるから、工学や化学を志す読者も、第5章はぜひマスターしてほしい。なお最後の節では、連続体の振動にも少し触れておいた。

本書を執筆するにあたっては、このコースの趣旨に沿うよう、説明はなるべ

くわかりやすく、できるだけ具体的な例を用いてすることを心がけたつもりである。しかし何ぶんにも、具体的な物についてあれこれと物理的(physical)に考える労を省き、話をなるべくすっきりと数学的にさせよう、というのが、ラグランジュやオイラーが解析力学をつくった目的なのであるから、どうしても内容に形式的・数学的なことが多くなるのを避けるわけにはいかなかった。読者が『力学』だけですまさずに、『解析力学』にまで進むのは、そのような解析的方法に慣れたいという希望をもってのことだと思うので、この程度でお許しいただければ幸いである。「数学を使うのは思考の経済のため」というマッハの考え方には、文科系の人たちにはとんでもないといわれるかもしれないが、確かに正しいのである。また、ずい分抽象的と見える数式的表現も、慣れればそれなりに具体性を帯びてくる。慣れていらない人には、地図ですら抽象的で、見ても何だかわからないものらしい！

ところどころに挿入したエピソードは科学史からとってきたものであるが、合理主義の結晶のような物理学をつくるに際して、西欧の人びとが「神」とどのように対決してきたかを知るのも面白いことだと思う。

本書の原稿を詳しく閲読し、いろいろと有益な御指示を下さった、本コースの編者の戸田盛和、中嶋貞雄両先生に、厚く感謝申し上げる。

1982年6月

小出昭一郎

目次

物理入門コースについて

はじめに

1 一般化座標とラグランジュの方程式	1
1-1 平面極座標	2
1-2 平面極座標による運動方程式	6
1-3 平面極座標の場合の一般化力	8
1-4 一般化座標と一般化力	11
1-5 ラグランジュの運動方程式	17
1-6 エネルギー保存則	23
演習問題(26)	
2 ラグランジュの方程式と束縛	29
2-1 束縛条件と一般化座標	30
2-2 ラグランジュ方程式の例	35
2-3 時間に依存する束縛条件	39
2-4 回転座標系とローレンツ力	45
2-5 散逸関数	50

2-6 オイラーの角 ······	52
演習問題(57)	
3 変分原理 ······	59
3-1 オイラーの方程式 ······	60
3-2 ハミルトンの原理 ······	67
3-3 最小作用の原理 ······	70
3-4 フェルマーの原理との比較 ······	75
演習問題(77)	
4 正準方程式と正準変換 ······	81
4-1 一般化運動量と循環座標 ······	82
4-2 ハミルトンの正準方程式 ······	84
4-3 位相空間内での運動 ······	90
4-4 リウビルの定理 ······	93
4-5 ポアソンの括弧式 ······	96
4-6 調和振動子の位相空間 ······	100
4-7 正準変換 I ······	106
4-8 正準変換 II ······	108
4-9 ハミルトン-ヤコビの方程式 ······	113
演習問題(117)	
5 力学系の微小振動 ······	121
5-1 2重振り子 ······	122
5-2 平衡点とラグランジュ関数 ······	127
5-3 基準振動と基準座標 I ······	129
5-4 基準振動と基準座標 II ······	131
5-5 分子の振動 ······	135
5-6 格子振動 ······	142
5-7 連続体の振動 ······	146

演習問題(150)

さらに勉強するために	151
問題略解	153
索引	175

コーヒー・ブレイク

ラグランジュの解析力学	24
ラプラスヒラグランジュ	40
オイラーと力学	56
等周問題と変分法	66
力学におけるイデオロギー論争	79
正準方程式の名の由来	89
作用変数と前期量子論	118

1

一般化座標と ラグランジュの方程式

力学系の運動を記述するのに、直交直線座標（デカルト座標）よりも他の変数を使った方が便利なことがしばしばある。その場合に非常に役立つのがラグランジュの方程式である。ベクトルの成分への分け方などに頭を悩ませずに、機械的に方程式が立てられるからである。この便利で実用的な処方箋が、どのようにしてニュートンの運動方程式から導き出されるのかを調べるのが、本章の目的である。

1-1 平面極座標

いちばん簡単な、1個の質点の平面運動の場合から話を始めることにしよう。質点の位置を表わす最も普通の方法は直交直線座標(デカルト座標ともいう)を用いるやり方で、平面の場合なら x 軸と y 軸を定めればよい。そうすると、質量を m 、力の x, y 成分をそれぞれ F_x, F_y として、ニュートンの運動方程式は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y \quad (1.1)$$

となる。力がポテンシャル $U(x, y)$ をもつ保存力なら

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad (1.2)$$

と表わされる。

よく知られた放物運動の場合には、特別な事情がないかぎり、座標軸は水平方向と鉛直方向にとるのが便利である。水平に x 軸、鉛直上向きに y 軸をとると、 $U=mg y$ と表わされ、 x を含まないから $F_x=0$ となり

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{dv_x}{dt} = 0 \quad \text{より} \quad mv_x = \text{一定}$$

がただちに得られるからである。運動量 p を用いれば

$$\frac{d}{dt} p_x = 0 \quad \text{より} \quad p_x = \text{一定}$$

が得られるということになる。

力が中心力の場合にはポテンシャルは原点(力の中心を原点にとる)と質点の距離

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.3)$$

だけの関数 $U(r)$ である。原点と質点とを結ぶ線分(動径といふ)の方向を示す角 θ には関係しない。このときの力は

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{dU}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{dU}{dr} \frac{x}{r} = -\frac{dU}{dr} \cos \theta$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{dU}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{dU}{dr} \frac{y}{r} = -\frac{dU}{dr} \sin \theta$$

となって一般には F_x も F_y も存在する(図 1-1). しかし力 \mathbf{F} を動径方向とそれに垂直な方向に分けた成分については

$$F_r = F_x \cos \theta + F_y \sin \theta = -\frac{dU}{dr} \quad (1.4)$$

$$F_\theta = -F_x \sin \theta + F_y \cos \theta = 0$$

となって $F_\theta=0$ である. $F_x=0$ から $p_x=\text{一定}$ がすぐに求められたように, $F_\theta=0$ からは何が導けるのであろうか. つぎの 1-2 節でも述べるように, 加速度 \mathbf{a} の成分は

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = 2r\dot{\theta}\dot{r} + r\ddot{\theta}$$

となるので, $F_\theta=ma_\theta=0$ から

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = r(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0$$

すなわち

$$r^2\dot{\theta} = rv_\theta = \text{一定} \quad (1.5)$$

が導かれる(図 1-2). これが面積速度($=rv_\theta/2$)一定の原理を表わしていることは第 1 卷『力学』4-3 節に述べられているとおりである. こうして θ 成分に関する運動方程式の積分が 1 回できたわけで, この(1.5)を使えば動径成分の運動方程式 $ma_r=F_r$ から $\dot{\theta}$ が消去できて, r と t だけの微分方程式が得られる. 運動方程式から運動をきめるには積分が必要であるが, 一般にそれは容易で

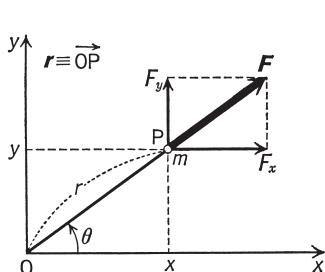


図 1-1 力が斥力の場合.

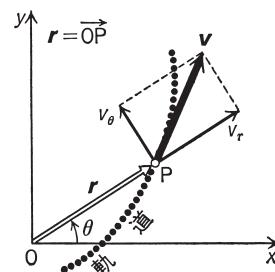


図 1-2

ない。複数の変数(x と y あるいは r と θ など)が互いにからみ合っていることが多いからである。それらをできるだけ分離し、しかも方程式のうちのなるべく多数を $d(\cdots)/dt=0$ という形に表わすことができれば、積分はただちにできることになる。そういうことのために、デカルト座標でも座標軸のとり方に気をくばる必要があるし、中心力ならば極座標を用いたほうがよいわけである。

さらに、運動のなかには、ある平面に沿ってとか、球面上で、といったように束縛条件を課せられたものが多い。それについては第2章で詳しく論じるが、以上のような理由でこれからデカルト座標以外のものを使うための準備として、ここでは平面極座標をやや詳しく調べることにする。

2次元の場合、デカルト座標は普通の方眼紙に対応している。「 $y=\text{定数}$ 」は x 軸に平行な直線を表わす。この定数を少しずつ(例えば1mmずつ)変えて、そのたびに直線を引けば、間隔が1mmの平行直線群が得られる。同様に「 $x=\text{定数}$ 」は y 軸に平行な直線群をつくる。こうして作ったのが方眼紙であり、位置を指定するのに、mmまでの精度でよいなら、横の何本目の線と縦の何本目の線の交点と言えばよいわけである。京都や札幌の都市計画はこのような考え方で立てられており、東西と南北の街路名によって、位置が指定できるようになっている。京都市の四条河原町は四条通りと河原町通りの交差点で、京都随一の繁華街である。

これに対し、東京の都市計画ははなはだ不完全であるが、平面極座標的になっている。主要な街路は、皇居を中心にして、内側から環状1号、2号、…と番号づけられた同心円的な道路群と、放射1号、2号、…と名づけられた中心

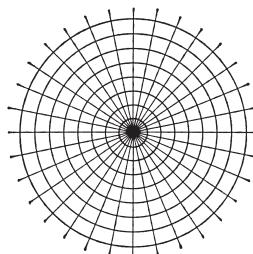


図 1-3

から郊外へ向かう放射状道路群とから成り立っている。これに対応する「方眼紙」は図 1-3 のようなものである。同心円は「 $r=定数$ 」の定数を少しずつ変えて描いたものであり、放射状の半直線はいろいろな値に対する「 $\theta=定数$ 」に対応している。

この場合、「 $\theta=定数$ 」は(半)直線であるが、「 $r=定数$ 」は円であって、曲がっている。ただし、これらの直線群と曲線群はすべて互いに直交している。それで、平面極座標は直交曲線座標と呼ばれるものの一つである。

平面極座標 r, θ を用いるときには、ベクトルなどは放射線方向(r 方向)と同心円方向(θ 方向)とに分解すると便利である。微小変位 dr も、そのように分けると

$$(dr)_r = dr, \quad (dr)_\theta = rd\theta \quad (1.6)$$

ということになる。 r は長さのディメンションをもつのに対し θ は角(ラジアン)で無名数であるから、 dr と $d\theta$ は同格でなく、一方は dr だけなのに他方は $rd\theta$ となって差がついている。

微小面積(面積素片)も、図 1-3 の「方眼紙」のマス目のようにとる。放射線沿いに dr 、同心円沿いに $rd\theta$ をとると、これらが微小であるため、これらを 2 辺とする長方形として

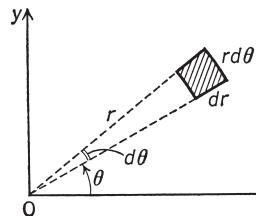
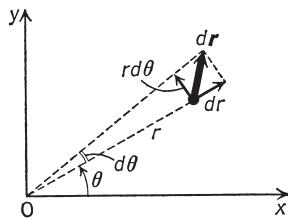


図 1-4 微小変位 dr と
微小面積。

1 一般化座標とラグランジュの方程式

$$\text{微小面積} = r dr d\theta \quad (1.7)$$

とすればよい。平面極座標でデカルト座標のときの $dxdy$ に対応するのは、 $drd\theta$ ではなくて $rdrd\theta$ であることを忘れてはいけない。(数学に詳しい読者は、 (x, y) から (r, θ) への変換 $x=r \cos \theta, y=r \sin \theta$ のときのヤコビアンが $\partial(x, y)/\partial(r, \theta)=r$ であることを使ってもよい。)

任意のベクトル \mathbf{V} を r 方向と θ 方向に分解した場合に、それと V_x, V_y との関係は、図 1-5 からすぐわかるように

$$\begin{aligned} V_r &= V_x \cos \theta + V_y \sin \theta \\ V_\theta &= -V_x \sin \theta + V_y \cos \theta \end{aligned} \quad (1.8)$$

逆は

$$\begin{aligned} V_x &= V_r \cos \theta - V_\theta \sin \theta \\ V_y &= V_r \sin \theta + V_\theta \cos \theta \end{aligned} \quad (1.9)$$

で与えられる。これらはこの章でこれからしばしば使用する関係式である。

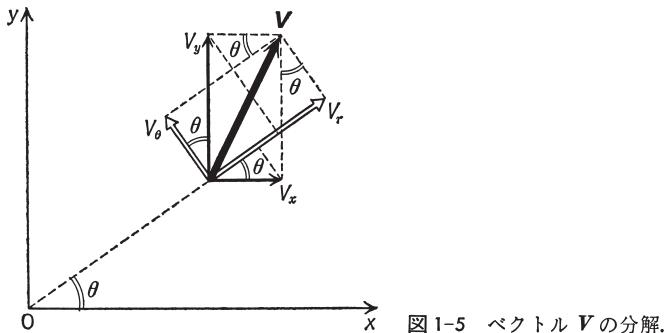


図 1-5 ベクトル \mathbf{V} の分解。

1-2 平面極座標による運動方程式

以上を準備とし、復習を兼ねて、平面極座標による運動の扱い方を振り返ってみよう。基本はニュートンの運動方程式 $m\mathbf{a}=\mathbf{F}$ であるから、加速度 \mathbf{a} を r と θ ——ともに時間 t の関数である——で表わすことが必要となる。

まず速度

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

から考える。微小変位 $d\mathbf{r}$ を(1.6)のように分解し、これにスカラー $1/dt$ を掛けたものが v_r と v_θ であるから

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} \quad (1.10)$$

がただちにわかる。ニュートン流の略号で書けば

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r \dot{\theta} \quad (1.10')$$

となる。これをもう少し「まっ正直」にやると、つぎのようになる。

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

を t で微分する。 r も θ も t の関数であるから

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dr}{dt} \cos \theta + r \frac{d}{dt} \cos \theta \\ &= \frac{dr}{dt} \cos \theta + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} \cos \theta \\ &= \frac{dr}{dt} \cos \theta + r \frac{d\theta}{dt} (-\sin \theta) \end{aligned}$$

略号で

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \quad (1.11\text{a})$$

同様にして

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \quad (1.11\text{b})$$

これらを、ベクトルの変換式(1.9)と見くらべれば、 $\dot{x}=v_x$, $\dot{y}=v_y$ であることから、ただちに(1.10')がわかる。

加速度は、正直にやるより仕方がない。(1.11a, b)をもう一度 t で微分すると

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \cos \theta - (2\dot{r}\dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \sin \theta \\ \ddot{y} &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \sin \theta + (2\dot{r}\dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \cos \theta \end{aligned} \quad (1.12)$$

が得られる(計算は自ら試みること)。 $\ddot{x}=a_x$, $\ddot{y}=a_y$ であるから、(1.9)式と比較することによって

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2, \quad a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r \ddot{\theta} \quad (1.13)$$

がわかる。

ここで注意しなくてはいけないのは、(1.10)あるいは(1.10')を t で微分したものがそのまま a_r, a_θ には ならないという点である。

$$a_r \neq \frac{dv_r}{dt}, \quad a_\theta \neq \frac{dv_\theta}{dt}$$

その理由は、 θ が t の関数であるため r 方向や θ 方向というのが空間に固定した方向ではなく運動とともに変化しているからであって、曲線座標の使用に伴う困難の1つがここにある。この面倒をうまく回避できるのが、ラグランジュの方法なので、そのために今しばらくの辛抱が読者に要求されるのである。

さて、ニュートンの運動方程式 $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ を、 r 成分と θ 成分に分けて書けば、

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r, \quad m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = F_\theta \quad (1.14)$$

となり、あとは F_r, F_θ の形によって解き方を工夫することになる。中心力の場合には $F_r = F(r)$, $F_\theta = 0$ であるから、(1.14)の第2式は

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0$$

となるが、左辺を変形すると

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \quad (1.15 \text{ a})$$

と書きなおせるので、これから

$$mr^2\dot{\theta} = \text{一定} \quad (1.15 \text{ b})$$

つまり(1.5)式 $mr\dot{\theta} = \text{一定}$ が出てくるわけである。

$F(r)$ に具体的な形——例えば万有引力——を入れた場合の解き方については、すでに『力学』(97-124ページ)で述べられているから、ここではくり返さないことにする。

1-3 平面極座標の場合の一般化力

質点の平面運動をデカルト座標で扱うとどういうことになっているであろうか。運動量 \mathbf{p} というものを

$$p_x = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}$$

で定義すれば、運動方程式は

$$\frac{d}{dt}p_x = F_x, \quad \frac{d}{dt}p_y = F_y \quad (1.16)$$

と書かれる。左辺は ma_x, ma_y と同じであるが、ニュートンが力学の出発点としたのは(1.16)の形であった。衝突の際の保存則などが示すように、速度よりも運動量のほうがより基本的な量なのであり、(1.16)のほうが $m\mathbf{a}=\mathbf{F}$ よりも一般性が広い表現なのである。

ところで、その p_x と p_y は、運動のエネルギー

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

から

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}, \quad p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \quad (1.17 \text{ a})$$

によって導かれる量である。したがって(1.16)式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = F_x, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = F_y \quad (1.17 \text{ b})$$

と書いてもよいことがわかる。

(x, y) の代りに (r, θ) を用いたとき、これに対して(1.17 b)と同様な式が成立するかどうか調べよう。運動エネルギーは、(1.10')を使えば

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \quad (1.18)$$

と書かれることがわかるから、(1.17 a)に対応する量としては

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad (1.19)$$

という 2 つが出てくる。したがって、(1.14)により

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) = F_r + mr\dot{\theta}^2 \quad (1.20 \text{ a})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = r F_\theta \quad (1.20 \text{ b})$$

となることがわかる。

(1.20 a)には F_r のほかに $mr\dot{\theta}^2$ という見かけの力(遠心力)が現われており, (1.20 b)の右辺は F_θ でなく rF_θ になっている。角 θ は長さのディメンションをもたないので $\dot{\theta}$ のディメンションも速度のそれではないから, (1.20 b)の左辺は力のディメンションをもっていない。したがって右辺に F_θ があったらそのほうがおかしいことになる。同様なことは微小変位 $d\mathbf{r}$ を行なったときに力 \mathbf{F} のする仕事を

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy$$

を書きなおしたときにも生じる。スカラー積の定義から

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_r (dr)_r + F_\theta (dr)_\theta$$

となるが, (1.6)によりこれは

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_r dr + F_\theta r d\theta$$

と表わされる。微小仕事を

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = Q_r dr + Q_\theta d\theta \quad (1.21)$$

と書いて、 Q_r, Q_θ をそれぞれ座標 r, θ に対する一般化力(generalized force)と呼ぶのであるが, 上の式から

$$Q_r = F_r, \quad Q_\theta = r F_\theta \quad (1.22)$$

となり, (1.20 b)の右辺に出てきたのはまさにこの Q_θ であることがわかる。

そうすると, (1.20 b)は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = Q_\theta$$

ということになるが, (1.20 a)のほうは余計な $mr\dot{\theta}^2$ の項が残り, 単純に Q_r とはおけない。次節の一般論からわかるように, この項は T が r と $\dot{\theta}$ のほかに r を含むので

$$\frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2$$

となることによって出てくるのである。 T は θ を含まないから $\partial T / \partial \theta = 0$ とな