はじめに

最近，小，中，高校生を通じて数学ぎらいがふえているようです．まあ好きなほうだという人も，公式をすぐ適用できる計算問題ならいいが応用はいやだというのが多いようです．しかし，それではまるで，公式をおぼえるのが数学であるかのようです．数学は，定義・定理・証明・公式……とがんじがらめで，檻(おり)の中に入れられたようなものだと考えているなら，それは完全な誤解です．

数学は楽しくおもしろく，そしてその天地はひろびろとしています．小川あり急流あり大河あり，なだらかな丘もあれば，雲をいただき高くそびえる山岳もあります．

この本では，12 の身近な話題をえらんで，ちょっとした眺めにみなさんを案内しようと思います．それも道草を食って行きましょう．

「九九」の小川では水遊びを楽しんで下さい．丘ではウサギが「黄金数」のまわりを跳びはね，野原ではアキレスと亀が鬼ごっこをしています．フェルマー仙人は，高い山の奥にかくれています．夜ともなれば，五角星がきらきらと輝くことでしょう．

ところでみなさん，案内にまかせるのも結構ですが，道の途中ででも，行きたいところができたら，どんどんそちらへ出かけて行って下さい．

道に迷ったら，そこでめずらしい数学の花が見つかるかも知れません．

谷底に落ちたら空を見上げて下さい．数学の山の景観は一段とみごとでしょう．

数学は与えられたものではありません．自分でさがし求め，自分でつくり上げるものです．身のまわりをさがして下さい．身近なところに数学がいっぱいあるでしょう．この本の 12 話はそのようなほんの少数例にすぎませんが，それらを通じて，数学に対する親しみとおもしろさを感じてもらえるなら，著者としてはこの上なくうれしいことです．

おわりに，参考にした先人の書物，楽しいカバー絵を描いて下さった福田繁雄氏，言葉や歴史について御教示下さった同僚の竹内孝次，藤村瞬一，長岡亮介の諸氏，終始お世話になった岩波書店の荒井秀男，堺信幸両氏に厚くお礼申し上げます．

1986 年 5 月

改版を機に，横書きに改めました．そしてメルセンヌ素数，π の計算の現状について，相当の変更とともに書き加えを行ないました．そのほか，いくつかの箇所でいくつかの小さな変更，調整をしました．改版については，岩波書店の森光実さんに大変お世話になりました．厚くお礼申し上げます．

2012 年 2 月

片 山 孝 次

＊紙媒体で使用していましたカバー及び章扉イラストは，電子書籍では使用しておりません．ご了承下さい．（編集部）

もくじ

1　ふしぎな数「9」

九　九

掛け算の「九九」は，小学校の低学年で習います．みなさんも，「二，二が四．二，三が六．……」と声に出しておぼえた思い出があるでしょう．なかには入学前におぼえて，得意になって吹聴しまわっていた人もいるかも知れません．

そのうちにただ暗記するだけではなくて，「九九」の仕組み，たとえば二の段は「二，二が四」からはじまって，二を次々に加えて行けばよい，ということに気づくわけですね．

「九九」は「二，二が四」からはじまりますが，このようなものをよぶときは，「九九」とはよばないで，最初の「二二」を使うのがふつうです．実際，ドイツでは，「一，一が一」からはじまり，「九九」を，

Einmal-eins（アインマール・アインス）

とよんでいます．それは「一の一倍」という意味です．

わが国では，昔は「九，九，八一」からはじまったため，「九九」という名がついたのですが，いつの間にか順序が逆転し，名前だけがそのまま残ったことがわかっています（平山諦『東西数学物語』恒星社厚生閣．三上義夫博士の発見．西暦 970 年の『口遊』および鎌倉時代末期の『拾芥抄』に実例があります）．

いま「昔は」といいましたが，「九九」はどれほど昔にさかのぼれるでしょうか．

万葉集

わが国では『万葉集』(5 世紀前半から 759 年にかけて成立)に「九九」はすでに現われ，いわゆる万葉仮名として「十六」「二二」「二五」「八十一」を，それぞれ「しし」「し」「とお」「くく」(または「ぐく」)と読ませています．

たとえば，

巻三，二三九　柿本人麿

……獦路乃小野尒　十六社者　伊波比拝目　鶉己曾　伊波比廻礼……

(猟路(かりぢ)の小野に　猪鹿(しし)こそば　い匍(は)ひ拝(をろが)め　鶉(うづら)こそ　い匍(は)ひ廻(もと)ほれ)

巻四，七八九　大伴家持

情八十一　所念可聞　春霞　軽引時二　事之通者

(情(こころ)ぐく　思ほゆるかも　春霞　棚(たな)びく時に　言の通へば)

巻六，九〇七　笠朝臣金村

……万代　如是二二知三　三芳野之　蜻蛉乃宮者　神柄香　貴将有……

(万代(よろづよ)に　かくし　知らさむ　み吉野の　蜻蛉(あきづ)の宮は　神柄(かむから)か　貴(たふと)くあるらむ)

巻十一，二七一〇

狗上之　鳥籠山尒有　不知也河　不知二五寸許瀬　余名告奈

(犬上(いぬかみ)の　鳥籠(とこ)の山にある　不知也川(いさやがは)　不知(いさ)とを聞こせ　わが名告(の)らすな)

といったたぐいです．

バビロニア（紀元前2000年ころ）出土の粘土板には，第2話でふれるように，9の乗法表が刻まれています．

フランスでは「九九の表」を「ピタゴラスの表」といいます．そのようによぶ根拠をみつけることはできませんでしたが，数の本性を研究した彼に敬意を表してのことでしょうか．ついでに，英語では「乗法表（multiplication table）」という，味気のない名前がついています．

モンテ・クリスト伯

小説などにも，思いがけなく「九九」が登場します．

たとえば，有名なアレクサンドル・デュマの『モンテ・クリスト伯』をみましょう．第29節（岩波文庫，第2巻，山内義雄訳）には，エドモン・ダンテス（＝モンテ・クリスト伯）の旧主モレル商会が破産にひんしている情景がえがかれています．その会計係コクレスは，

「計算にかけては一歩も譲ることをしなかった．
……彼はピタゴラスの表しか知らなかった」

のです．「ピタゴラスの表」といえば，何か重々しい感じがします．「それしか知らない」ということで，コクレスの頑固さ，忠実さがうきぼりにされています．「ピタゴラスの表」を「九九の表」と訳すと，日本では全く軽い意味にしか受けとれません．その次につづく文章，

「人々にそれをどんなにひっくり返してたずねられても，人々がどんなに彼を間違わせようとやってみても，彼は，掌を指すようにその表を知っていた」

が生きてきません.「九九の表」にしては，いささか大げさな表現ですが，思うにデュマは，掛け算が不得手だったのではないでしょうか.

アンデルセン

アンデルセンの童話『雪の女王』には，次のような場面があります.

悪魔の鏡の破片が心臓に入って意地悪になった少年カイの乗った小さなそりが，雪の女王の大きなそりにぴったりくっついて，堀や生垣の上を飛び越して，ぐんぐん飛ぶように走ります.

> 「カイはもう，すっかりこわくなって，「主の祈り」を唱えようとしました．ところが，頭に浮んでくるのは，九九の大きな表ばかりでした」(岩波文庫，大畑末吉訳)

デンマークでは「九九」は1から10までの「小さな表」(Den lille tabel)と11以上の「大きな表」(Den store tabel)があり，ここでは後者を指しています．それにしてもカイの場合，「九九の表」は何を象徴しているのでしょうか.

西遊記

中国の『西遊記』(16世紀前半？ 明代)は，その構成においてすでに「九九」が関係しています．それは100話から成り，三蔵法師は八十一難を克服して大願成就することになっています．岩波文庫，巻4(中野美代子訳)の222ページにある「九九の功」はそのことを指しています．もっとも，九は陽の数，「九九」は陽が重なる，

そのめでたい重陽を貴ぶことの方に力点があるのかも知れません．そのほかにも，

「人が死んだら，三七の 21 日と五七の 35 日，そして七七の 49 日のあいだに……」(293 ページ)

という表現があります．

数　列

さて，九の段を書き並べると

(1)　09　18　27　36　45　54　63　72　81　90

となります．九九を延長して $9\times 11, 9\times 12, \cdots$ とつづけると，

(2)　99　108　117　126　135　144　153　162　171　180　189　198　207　216　225　…

が得られます．

このように，数をある一定の規則に従って並べたものを「数列」といいます．

数列には有限個の数を並べたもの，無限に多くの数を並べたものがあり，前者は「有限数列」，後者は「無限数列」とよばれます．(1) は有限数列であり，(2) の「…」がどこまでも限りなくつづく意味とすれば，(2) は無限数列です．

また，正の整数を $1, 2, 3, 4, \cdots$ と並べたもの(自然数列)も無限数列です．

さて，(1), (2) を合わせた数列は，実にみごとな整列ぶりですね．それを，

「各数の右端には $9, 8, 7, \cdots, 2, 1, 0$ がこの順にくり返し現われ，その左側には $1, 2, 3, \cdots$ の順に自然数が

現われている．ただし，右端の数が 0 と 9 のところの左側の数字は同じである」

と表現することができます．みなさんも，この数列の美しさを十分に鑑賞して，自分の言葉でこのみごとな整列ぶりを言い表わしてみて下さい．

9 という数については古来さまざまな，美しい，おもしろい，ふしぎな現象が知られています．そのいくつかを，表にしました．そこに現われている数列は実にみごとですね．そして並び方の規則を読みとるのもやさしいと思います(表 1～表 6)．

しかし，いたずらに美しさに感心しているだけでは，何にもなりません．なぜこのようにきれいなのか，9 のどのような性質が，この整列ぶりに反映しているのか，を考えなければなりません．よく幼児がいいますね．「なんで？」「どうして？」．それこそ数学をする，あるいはおもしろくする言葉です．

9 についての定理

9 についての次の定理は，有名かつ有用です．

(3)　「ある数を 9 で割った余りは，各位の数の和を 9 で割った余りに等しい」

たとえば，543 にこの定理を適用すると，

543 を 9 で割った余りは各位の数の和 $5+4+3=12$ を 9 で割った余りに等しい．

となります．実際，543 を 9 で割ると

$$543 = 9\times60+3$$

ですから余りは 3，一方 $5+4+3=12$ を 9 で割った余

$$
\begin{aligned}
12345679\times 9 &= 111111111\\
12345679\times 18 &= 222222222\\
12345679\times 27 &= 333333333\\
12345679\times 36 &= 444444444\\
12345679\times 45 &= 555555555\\
12345679\times 54 &= 666666666\\
12345679\times 63 &= 777777777\\
12345679\times 72 &= 888888888\\
12345679\times 81 &= 999999999
\end{aligned}
$$

表 1

$$
\begin{aligned}
987654321\times 9 &= 8888888889\\
987654321\times 18 &= 17777777778\\
987654321\times 27 &= 26666666667\\
987654321\times 36 &= 35555555556\\
987654321\times 45 &= 44444444445\\
987654321\times 54 &= 53333333334\\
987654321\times 63 &= 62222222223\\
987654321\times 72 &= 71111111112\\
987654321\times 81 &= 80000000001
\end{aligned}
$$

表 2

$$
\begin{aligned}
1\times 9+2 &= 11\\
12\times 9+3 &= 111\\
123\times 9+4 &= 1111\\
1234\times 9+5 &= 11111\\
12345\times 9+6 &= 111111\\
123456\times 9+7 &= 1111111\\
1234567\times 9+8 &= 11111111\\
12345678\times 9+9 &= 111111111
\end{aligned}
$$

表 3

$$
\begin{aligned}
9\times9+7&=88\\
98\times9+6&=888\\
987\times9+5&=8888\\
9876\times9+4&=88888\\
98765\times9+3&=888888\\
987654\times9+2&=8888888\\
9876543\times9+1&=88888888
\end{aligned}
$$

表 4

$$
\begin{aligned}
9\times9&=81\\
99\times99&=9801\\
999\times999&=998001\\
9999\times9999&=99980001\\
99999\times99999&=9999800001\\
999999\times999999&=999998000001\\
9999999\times9999999&=99999980000001
\end{aligned}
$$

表 5

$$
\begin{aligned}
9^3&=729\\
99^3&=970299\\
999^3&=997002999\\
9999^3&=999700029999\\
99999^3&=99997000299999
\end{aligned}
$$

表 6

りも 3 ですね.

もう一つ，1986 を 9 で割った余りは 6．一方，各位の数の和 $1+9+8+6=24$ を 9 で割った余りも 6 です．それはなぜでしょうか.

$$
\begin{aligned}
543 &= 5\times100+4\times10+3\\
&= 5\times(99+1)+4\times(9+1)+3
\end{aligned}
$$

$$= 5\times 99+4\times 9+5+4+3$$

と書きかえれば，はじめの2項はともに9で割り切れます．したがって，543を9で割った余りは，残りの3項の和5＋4＋3（各位の数の和）を9で割った余りに等しいのです．

とにかく，この定理の核心は，

（4）　$100 = 99+1,\qquad 10 = 9+1$

あるいは，少し弱く表現して

（4′）　100, 10は，それぞれ9の倍数に1を加えたものである．

というところにあります．

合同記号

このようなことを，すっきりと数式で表わすことを考えましょう．そのために，ガウスが導入した「合同記号」を用いることにしましょう．

nを与えられた正の整数とします．整数a, bに対して$a-b$がnで割り切れるとき，すなわちa, bをそれぞれnで割った余りが等しいとき，

$$a \equiv b \pmod{n}$$

と書き，「nを法として（あるいは法nに関して），aとbは合同である」といいます．

たとえば，$13-4=9$ですから，$13\equiv 4 \pmod{9}$が成り立ちます．もちろん，$13\equiv 4 \pmod{3}$も成り立ちますね．

541を31で割った余りは14，293を31で割った余りも14，したがって，

$$541 \equiv 293 \pmod{31}$$

が成り立ちます．

この合同記号を用いると，定理のポイントであった(4′)は，

$$100 \equiv 1 \pmod 9,\qquad 10 \equiv 1 \pmod 9$$

と書かれますね．もっと一般に，自然数 k に対して，

(5)　$10^k = \underbrace{99\cdots\cdots9}_{k\text{個}}+1$

ですから，

(6)　$10^k \equiv 1 \pmod 9$

が成り立ちます．

合同記号の四則演算

合同記号のすばらしさは，ふつうの等号のように四則演算(加減乗除)がうまく行くことにあります．

すなわち，加，減，乗については，

$$a \equiv b \pmod n,\qquad c \equiv d \pmod n$$

表1の第1式右辺には1が9個並んでいますから，(5)式の k=9 の場合ですね．すなわち，

$$\frac{10^9-1}{9} = 111111111$$

よって第1式の両辺を9で割った式

$$12345679 = \frac{10^9-1}{81}$$

が成り立つことを知れば，第1式が成り立つことがわかりますね．第2式以下は，第1式を2倍，3倍，……すれば，ずらずら出てきます．

ならば,

$$a+c \equiv b+d \pmod{n}$$
$$a-c \equiv b-d \pmod{n}$$
$$ac \equiv bd \pmod{n}$$

とくに,任意の整数 h に対して

$$ah \equiv bh \pmod{n}$$

が成り立つことが分かります.

表 2 の第 1 式をみましょう.10 進法で

$$987654321 = 9\cdot10^8+8\cdot10^7+7\cdot10^6+6\cdot10^5 +5\cdot10^4+4\cdot10^3+3\cdot10^2+2\cdot10+1$$

と表わし,両辺に $9=10-1$ を掛け,次のように計算します.

$$\begin{aligned}
&9\cdot10^9+8\cdot10^8+7\cdot10^7+\cdots+3\cdot10^3+2\cdot10^2+1\cdot10 \\
&\quad -(9\cdot10^8+8\cdot10^7+7\cdot10^6+\cdots+3\cdot10^2+2\cdot10+1) \\
&\qquad = 9\cdot10^9-(10^8+10^7+10^6+\cdots+10^2+10+1) \\
&\qquad = 8\cdot10^9+10^9-(10^8+10^7+10^6+\cdots+10^2+10+1) \\
&\qquad = 8\cdot10^9+8\cdot10^8+2\cdot10^8-(10^8+10^7+10^6+\cdots+10^2+10+1) \\
&\qquad\quad \cdots\cdots \\
&\qquad = 8\cdot10^9+8\cdot10^8+8\cdot10^7+\cdots+8\cdot10+10-1
\end{aligned}$$

この最後の数は 8888888889 ですね.

上の計算では,

$$9\cdot10^9 = 8\cdot10^9+10^9$$
$$10^9 = 10\cdot10^8 = 8\cdot10^8+2\cdot10^8$$

のような変形が使われています.

結局，二つの合同式(ただし，法は同じ n)は，

　辺々加える，

　辺々引く，

　辺々乗ずる，

そしてとくに，

　一つの合同式の両辺に，ある数を掛ける

ことが許されるのです．

たとえば

$$29 \equiv 23 \pmod 3$$
$$37 \equiv 40 \pmod 3$$

より，

辺々加えて　$29+37 \equiv 23+40 \pmod 3$

すなわち　$66 \equiv 63 \pmod 3$

辺々引いて　$29-37 \equiv 23-40 \pmod 3$

すなわち　$-8 \equiv -17 \pmod 3$

表3では $9=10-1$ とおきかえましょう．

表4の第1式も，$9=10-1$ とおいて

$$9\times9+7 = (10-1)\times9+7 = 90-9+7 = 90-2$$

と計算すればよろしい．第2式は

$$98\times9+6 = (100-2)\times9+6 = 900-18+6 = 900-12$$

です．第3式は

$$987\times9+5 = (1000-13)\times9+5 = 9000-117+5 = 9000-112$$

ですね．あとも同様です．

さらに -1 を乗じて　$8 \equiv 17 \pmod 3$

辺々乗じて　$29 \times 37 \equiv 23 \times 40 \pmod 3$

すなわち　$1073 \equiv 920 \pmod 3$

が得られます.

この性質を前に使った543に応用し，その数に対する定理(3)を証明しましょう.

$$100 \equiv 1 \pmod 9$$
$$10 \equiv 1 \pmod 9$$
$$1 \equiv 1 \pmod 9$$

の両辺に，それぞれ5, 4, 3を乗じて

$$500 \equiv 5 \pmod 9,\quad 40 \equiv 4 \pmod 9,\quad 3 \equiv 3 \pmod 9$$

を得，これらを辺々加えて

$$543 \equiv 12 \pmod 9$$

が得られます．これは，543, 12をそれぞれ9で割った余りが等しいことでしたね.

この考察は，どんな整数に対しても通用します．したがって，(6)を知っている以上，一般的な定理(3)の証明はあと一歩で，まねをしさえすればよいのです.

除法については，ややむずかしくなるので割愛します．くわしくは遠山啓著『初等整数論』日本評論社，を参照して下さい.

数の美しさを示す例

その他「数の美しさ」を示す例を表7〜表10にあげました.

表7を説明しましょう．これは1の位の数が5である数の平方に関するものです．たとえば，15^2 を計算する

$$5^2 = 25$$
$$15^2 = 225$$
$$25^2 = 625$$
$$35^2 = 1225$$
$$45^2 = 2025$$
$$55^2 = 3025$$
$$65^2 = 4225$$
$$75^2 = 5625$$
$$85^2 = 7225$$
$$95^2 = 9025$$

表 7

には，$5^2=25$ を下 2 桁にし，$1\times2=2$ をその左に書けば，

$$15^2 = 225$$

が得られますね．ここで 1×2 は，平方する数 15 の左側の数 1 と，それに 1 を加えた 2 との積を意味します．

65^2 ならば，まず $5^2=25$ を書く，その左側に $6\times7=42$ を書いて，

$$65^2 = 4225$$

が得られます．6×7 の意味も前と同様です．そのほかの，このような数に対しても計算は同様であって，表にはのっていませんが，$12\times13=156$ ですから

$$125^2 = 15625$$

最後の表 11 には，ピタゴラスが「聖なる数」とよんだ 36 の，いくつかの「美しさ」を示す例をあげました．