



ドミトリ・フォミーン  
セルゲイ・ゲンキン  
イリヤ・イテンベルク  
志賀浩二・田中紀子[訳]

やわらかな思考  
を育てる  
数学問題集 1

岩波書店

MATHEMATICAL CIRCLES  
Russian Experience

by Dmitri Fomin, Sergey Genkin, and Ilia Itenberg

Copyright © 1996 by the American Mathematical Society

First published 1996 by the American Mathematical Society,  
Providence, Rhode Island.

The Japanese edition published 2012,  
this e-book edition published 2021  
by Iwanami Shoten, Publishers, Tokyo

by arrangement with the American Mathematical Society.

## 岩波現代文庫版にあたって

本書は 1996 年にアメリカ数学会から出版された

Mathematical Circles (Russian Experience)

の翻訳です。本書がロシアでどのようにして生まれてきたか、またどのような特徴をもっているかについては、内容の紹介とともにアメリカ版の序で詳しく書かれています。この岩波現代文庫版では原書を 3 分冊に分けることにしました。翻訳はできるだけ原書にしたがって忠実に行ないましたが、不適切と思われる問題も 2, 3 あってそれらには少し手を加えました。原書に載せられていた文献についてはそれらのほとんどがロシア語の本であり、現在では入手可能かどうかさえはっきりしないので、ここでは割愛しました。文献を引用してみなければ読めないような箇所はありませんでした。

第 8 章「最初の 1 年用の問題」に載せられている 113 の問題と第 17 章「2 年目用の問題」に載せられている 139 の問題は、ひとつひとつが非常に興味あるものですが、この解答は原書には載せられていません。第 14 章、第 16 章にも解やヒントのつけられていない問題があります(第 14 章の問 51-54, 60-63, 第 16 章の問 14-16, 31-38, 48-51, 61-82)。これらの問題については、増田一男氏の協力を得て解答を作成し、本書に含めました。

iv 岩波現代文庫版にあたって

さらに増田一男氏には校正刷を閲読していただき、本書の数学的内容について細かな点までご注意、ご助言をいただきました。また岩波書店の浜門麻美子さんには編集上のこといろいろお世話になりました。ここに深く感謝の意を表わしたいと思います。

2012年10月

志賀浩二・田中紀子

## アメリカ版への序

これは教科書ではありません。コンテスト用の問題集でもありませんし、もちろん学校の授業で用いられる問題集でもありません。また生徒さん向けの研究課題でもなければ、数学をひとりで勉強させようという意図でつくられたものでもありません。

それではいったいこの本はどのような本なのでしょうか。この本は私たちから遠く離れた国の文化的環境の中でつくり出された注目すべき試みを示しているのです。というのは、現在のロシア共和国となる前のソヴィエト連邦で、生徒、先生、数学者たちがひとつになって数学サークルというグループをつくり、そこで新しい数学の教育活動をしていこうとする積極的な動きがありました。この本はそのグループの形成の核心におかれただったのです。このようなグループをつくりうとする考えは、数学の勉強が競争心にあおられることなくできるような環境をつくっていこうというところから生じました。そこではチームプレイのような熱心さが勉強を支えることになるでしょう。

したがって、この本は数学的な楽しみを与える本のようなものといえます。もっとも、ここで意図されたことは楽しみという言葉よりはもう少し真剣なものです。この本を書い

たのは大学の数学者たちで、これらの数学者たちの、高校生のグループとの交流の経験がこの本を生むきっかけになつたのです。この本では問題が、どんな生徒さんたちでも最初のいくつかはたやすく解ける、というように構成されています。そして、最初の段階の問題を解くときには使われたのと同じ原理で、後の方のかなり難しい問題でも解けるようになっています。その中間には、興味によって、あるいは能力によって異なるレベルに対する問題が用意されています。

以前のソヴィエト連邦、とくに当時のレニングラード(現在のサンクトペテルブルク)にあった数学サークルは、アメリカにあるいろいろな数学クラブとはかなり違っていました。それらのグループのほとんどは高校の先生たちによって運営されるのではなく、大学の先生あるいは学生によって運営されていました。彼らはこれを自分たちの仕事の一部と考え、若い生徒たちに数学を学ぶ楽しさを教えたのです。生徒たちは時には夜遅くまで、時には週末の小旅行や夏の合宿に参加し、アメリカでは体育系のチームにしか見られないような友情と助け合いの精神を養っていました。

現在では幸いなことに、ロシア人とアメリカ人が簡単に情報交換ができる、おたがいの文化を知ることができるようになってきました。数学教育の発達はロシアの文化的一面であり、そこには私たちが学ばなければならぬことがたくさんあります。アメリカでは、時間、エネルギー、思考を高校生のために喜んで使おうという数学者はなかなかいません。

ですから、私たちはロシアの同僚たちから学ばねばなりません。この本はそうしたロシアの文化の中から芽生えたものをそのまま借りてできたものです。この本の中のある章、たとえば三角不等式の章などは、すぐにでも高校の場で取り入れることができ、通常の教科書の補助教材として使えます。グラフ理論などの章は、ふつう学校では教えませんが、これはカリキュラムの域をこえて数学の神髄を教えてくれます。また、ゲームの章などは、教科以外の場でも使えるようなテーマを豊富に与えてくれます。

どの章でも、非常に単純な形での数学的な方法の例があげられています。ニムのゲームは小学校の3年生でも楽しんで遊び考えることが可能ですが、これは本質的にはチェス盤のうえで、ルーク1つだけで遊ぶゲームと同じことです。これは中学1年生には、問題を言いかえて与えることができ、また、高校生には同型写像への導入となります。鳩の巣箱の原理は、単純でありながら奥の深い数学の考え方を示すものであり、数論や幾何の証明のときに道具として使えるものです。

このようなものでありながら、全体のトーンは重くありません。組み合わせ論の章は母関数や数学的帰納法などを理解している必要はありません。グラフ理論の章も、数学で重要なこの分野に軽く触れるにとどめています。どのトピックでも、それに取り組むためにまず必要とされるものは柔軟な思考力であって、形式的な数学を単純に適用しようとする考え

は避けられるように配慮されています。しかしそれでいながら、問題に取り組んでいると深い注意力が自然とひきだされるようによく工夫されています。

この質の高さこそ、以前のソヴィエト連邦の数学者たちが、最初の段階における数学の提示を高等な技術にまで高めたものの現われにほかなりません。数学での発展だけでなく、数学をどのように示すかということもロシアの数学者の仕事の一部となっているのです。このようにこの本は、英語圏では発達しないままになっている著作の一分野をなしているのです。

マーク・ソウル

ブロンクスビルスクール  
ブロンクスビル、ニューヨーク

## ロシア版への序

### はじめに

この本はもともと、以前のソヴィエト連邦で、学外の数学教育に携わる人々、たとえば数学の教育に携わっている学校の先生、大学の教授、数学のグループを運営している人たち、あるいは、数学的でありながらしかも楽しめるものを読みたいと思っていた人々のために書かれたものです。それにもちろん、生徒たちもこの本を個人的に読むことができます。

この本を著わそうとしたもうひとつの理由は、60年以上にわたって、レニングラード(現在のサンクトペテルブルク)で行なわれてきた数学教育の伝統が果たした役割を記録しておくことが必要だと私たちが考えたことがあります。この私たちのまちは、ソヴィエト連邦での数学オリンピックの発祥の地でした(第1回の生徒向けの数学セミナーが1931-32年に開かれ、1934年には最初のレニングラードオリンピックが開かれたのです)。この分野の指導者の一人であった数学者は、いまなおお元気ですが、これまでその教育的な経験が興味をもつ読者のために本として著わされたことはありませんでした。

\* \* \*

この本にはさまざまな形の問題が納められていますが、方法論的にみれば似通ったものです。ここには数学の学外教育での最初の2年間のために、あらゆる基本的な話題が納められています。私たちの主な目的は、学外教育のための準備を提供している先生たち(あるいは子どもに標準的でない数学を教えることに熱心な人たち)のために簡単な問題集をつくることでした。私たちは生徒に数学的に大切な考え方を示し、かれらの興味をこれらの考えに引きつけたかったのです。

準備する、そして授業を行なう、これらはそれだけで創造的过程です。したがって、私たちの書いていることに無条件に従うのは賢明なこととはいえません。しかし、この本を読んでいただければ、授業への材料を手にすることができます。この本は次のように使っていただきたいと思います。ある分野を教えるとき、この本のその章を読んで分析し、その後、授業の構成を考えるので。もちろん、生徒のレベルによって、調整をする必要があるでしょう。

\* \* \*

次に、レニングラードでの数学の課外授業の伝統について、2つの大切な点を述べておきたいと思います。

(1) 授業は、生徒と先生のあいだのいきいきとして自発

的なコミュニケーションを目指すものであり、そこでは、生徒ひとりひとりの個性は十分尊重して扱われます。

(2) この教育へのスタートはかなり早い時期、通常、6年生(11-12歳)、あるいはもう少し早い時期に始まります。

この本は中学生とその先生のためのガイドとして書かれました。もちろん生徒の年齢によって、授業のスタイルは変わります。そこで次のような提案をしておきます。

- (A) ひとつの分野に関して、低学年の生徒たちに長い授業をするのはよくないと考えます。1回の授業の中でも内容を変化させた方が有効です。
- (B) すでに終えた内容にふたたび触れることが必要です。この場合、数学オリンピック用やほかの競技用の問題を使うことができます(付録参照)。
- (C) あることを問題にしているとき、もっとも基本的な目標のいくつかを強調し、事実と考え方を完全に理解(たんなる記憶でなく)させるようにしましょう。
- (D) 授業では、解と証明のほかに、標準的でない問題や、ゲームのような活動を取り入れることを勧めます。娯楽的な問題や数学的ジョークを取り入れることも大切です。

ここで私たちは、レニングラードの数学サークルのいくつかの問題集を編集した人々のことをあげないわけにはいきま

せん。それらの本は、いままでは残念ながら、中学での数学教育に関心を抱く多くの人たちに届くことはありませんでした。

1990-91年、この本の第I部のオリジナル版が、何人かの著者によって書かれた論文集として、ソヴィエト連邦教育学アカデミーから出版されました。それらの資料を私たちの本の準備にあたって使うことができたことを、次にあげる同僚たちに感謝したいと思います。デニス G. ベヌア, イーゴリ B. ジューコフ, オレク A. イヴァノフ, アレクセイ L. キリченコ, コンスタンチン P. コハス, ニキータ Yu. ネツヴェターエフ, アンナ G. フロロヴァ。

またイーゴリ・ルバノフには、心からの感謝を捧げます。氏が自身の本のために特に書いた帰納法についての論文は、「帰納法」という章に納めました。

アレクセイ・キリченコが、この本を書く初期の段階で大いに助けてくれたことを見過ごすわけにはいきません。また図を描いてくれたアンナ・ニコラエヴァにも感謝します。

## この本の構成について

この本には、この序、2つの主要な部、付録「数学競技」、「答え、ヒント、解き方」が納められています。

第I部(「最初の1年」)は第0章から始まりますが、ここには10-11歳ごろの生徒用に準備された問題が入っています。この章の問題は数学的内容を含んでいませんが、生徒の数学

的および論理的能力を目覚めさせることを目的としています。第Ⅰ部はそのあと8章に分かれていますが、第7章までは特定の分野に向けられていて、最後の第8章(最初の1年用の問題)はさまざまなテーマの問題を寄せ集めたものとなっています。

第Ⅱ部(「2年目」)は、9章から組み立てられています。章のいくつかは第Ⅰ部のつづきですが(たとえば「グラフ(2)」、「組み合わせ(2)」),ほかの章には1年目には少し複雑と思われる問題、「不変量」、「帰納法」、「不等式」などが納められています。

付録は、先のソヴィエト連邦でさかんに行なわれた数学競技のうち、主な5つについて書いてあります。これらは数学サークルの授業で使うこともできますし、別のサークル間やあるいは学校間での競技のために使うこともできます。

先生への提案が「先生たちへ」という項にあります。数は少ないので「方法論的な注意」という項には、問題を解くにあたってどういう方法を用いたらよいか、という提案が書かれています。これらは証明の基本的パターンや、問題を認識して区分する方法に、注意を向けるものです。

## 用語と記号について

- (1) 高度の問題には星印(\*)がついています。
- (2) 問はだいたい、「答え、ヒント、解き方」で説明されています。その場合、解き方をすべて説明したもの

もありますが、ヒントや答えだけの場合もあります。問  
が計算だけの場合はだいたい答えだけが示されています。  
問題がひとつひとつの独立な解き方を求める場合  
には(とくに第 8 章と第 17 章), 解は示してありません  
[訳註: この日本語版では独自に解答を入れました]。

## 目 次

岩波現代文庫版にあたって  
 アメリカ版への序  
 ロシア版への序

### 第 I 部 最初の 1 年

第 0 章 はじまり .....	3
第 1 章 パリティ(偶奇性) .....	11
§ 1 交 互 .....	12
§ 2 分 割 .....	16
§ 3 奇数と偶数 .....	19
§ 4 いろいろな問題 .....	21
第 2 章 組み合わせ(1) .....	25
第 3 章 整除と余り .....	45
§ 1 素数と合成数 .....	45
§ 2 余 り .....	54
§ 3 追加問題 .....	65
§ 4 ユークリッドの互除法 .....	67

<b>第4章 嬉の巣箱の原理</b>	71
§1 はじめに	71
§2 もっと一般的な鳩	75
§3 幾何における鳩	79
§4 もうひとつ的一般化	81
§5 整 数 論	82
<b>第5章 グラフ(1)</b>	87
§1 グラフとはなにか	87
§2 頂点の次数——辺を数える	93
§3 新しい定義	96
§4 オイラーのグラフ	100
<b>第6章 三角不等式</b>	103
§1 はじめに	103
§2 三角不等式と幾何学的変換	106
§3 補 足 図	110
§4 いろいろな問題	111
<b>第7章 ゲーム</b>	113
§1 軽いゲーム——ジョークのようなゲーム	114
§2 対称性	117
§3 勝つ位置	122
§4 終盤からの分析 ——勝つ位置を見つける方法	125

第8章 最初の1年用の問題.....	131
§1 論理的問題.....	131
§2 具体例の構成と計量.....	136
§3 幾何の問題.....	143
§4 整数の問題.....	146
§5 いろいろな問題.....	152
答え, ヒント, 解き方.....	157
解説 先生, 答え言わないで! の時間	
.....佐藤雅彦 .....	257

[第 2 冊の目次]

**第 II 部 2 年目**

第 9 章 帰 納 法

第 10 章 整除(2)——合同式とディオファンツ方程式

第 11 章 組み合わせ(2)

第 12 章 不 変 量

第 13 章 グラフ(2)

[第 3 冊の目次]

**第 II 部 2 年目(つづき)**

第 14 章 幾 何

第 15 章 基数システム( $n$  進法)

第 16 章 不 等 式

第 17 章 2 年目用の問題

付録 数学競技

イラスト 早川 司寿乃

第Ⅰ部

---

**最初の1年**





## 第 0 章

# はじまり

この章にはやさしい問題を 25 問集めました。問題を解くのに必要なのは常識とごく簡単な計算力だけです。ですから、ここにあげた問題を使って論理的に考える力も数学的な能力も見ることができます。またゲームとして遊ぶこともできます。

\* \* \*

**問 1** コップの中にバクテリアを入れます。1 秒後、バクテリアはそれぞれ 2 個に分裂し、2 秒後には分裂したバクテリアがまたそれぞれ 2 個に分裂します。分裂がこのようにつづいていって、1 分後にはコップがバクテリアで一杯になりました。バクテリアがコップの半分だったのはいつでしょうか。

**問 2** アンとジョンとアレックスがディズニーランドでバスに乗りました。バス代としてプラスティックのコインでそれぞれ 5 チップを支払わなければならないのですが、3 人が

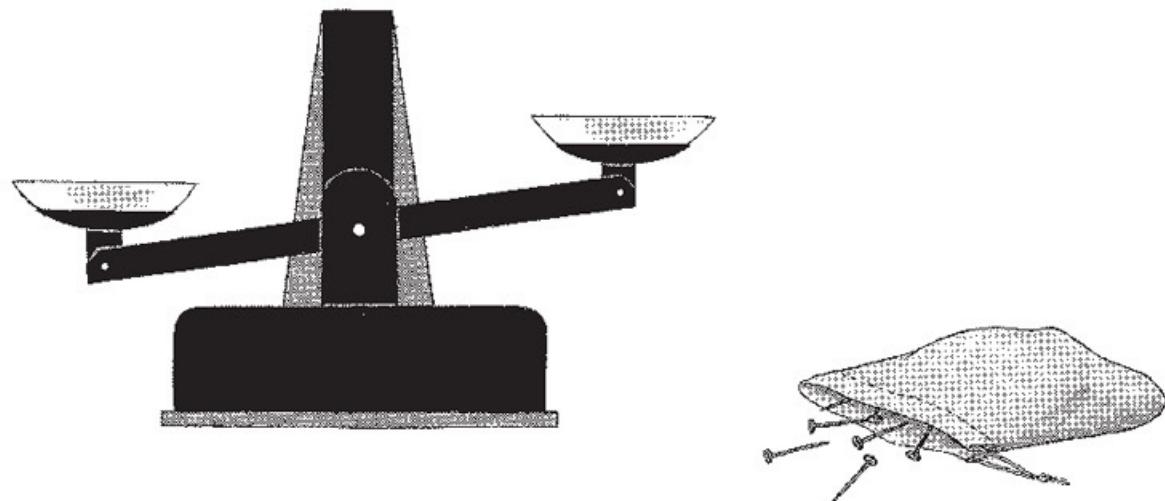
#### 4 第0章 はじまり

持っていたのは 10 チップ, 15 チップ, 20 チップのコインだけでした(ただし, 3 種のコインはたくさん持っていました)。3人はどのようにバス代を支払ったのでしょうか。

**問3** ジャックはある本から連続したページを何枚か破りとりました。破りとった部分の一番上のページは 183 ページで, 最後のページは最初のページと同じ数字が異なる順序で並んでいます。ジャックが破りとったのは全部で何ページでしょうか。

**問4** 青虫が 75 センチメートルのポールをはい登っています。地面から始めて 1 日に 5 センチメートル登るのですが, 夜には 4 センチメートルすべり落ちてしまいます。ポールの先端に最初にたどりつくのは何日目でしょうか。

**問5** くぎが 24 キログラム分, 袋に入っています。この中から, 2 つの皿のついた天秤てんびんを使って 9 キログラム分だけとりだすにはどうしたらよいでしょう。



問6 ある年の1月には金曜日が4回、月曜日が4回あります。この年の1月20日は何曜日でしょう。

問7  $199 \times 991$  個のマス目でできている方眼紙に対角線を引くと、何個のマス目を横切ることになるでしょう。

問8 1234512345123451234512345 という数から10個、数字をとりのぞき、残ってできた数が最大になるようにするにはどの数字をとればよいでしょうか。

\* \* \*

問9 ピーターがいいました。「おととい、ぼくは10歳だったけど、来年には13歳になるんだよ。」こんなことは可能でしょうか。

問10 ピートの猫は雨が降る前にはかならずクシャミをします。今日、その猫がクシャミをしました。「じゃあ、もうすぐ雨だな」とピートはいいます。ピートは正しいでしょうか。

問11 先生が1枚の紙の上に円をいくつか描いて、「円はいくつありますか」と聞きました。ある生徒は「7つ」と答えました。先生は「そうですね」といい、別の生徒にも「円はいくつあるでしょう」と聞きました。その生徒は「5つです」と答え、今度も先生は「正解です」といいました。この紙には実際にはいくつ円が描かれているのでしょうか。

## 6 第0章 はじまり

**問 12** ある教授のお父さんのひとり息子が、その教授の息子のお父さんと話していますが、その教授はこの会話には加わっていません。こんなことは可能でしょうか。

**問 13** 3匹の亀がまっすぐな道を同じ方向に向かってはっています。「わたしのうしろに2匹の亀がいる」と1匹目の亀がいいます。2匹目の亀は「ぼくのうしろには1匹いて、もう1匹は前にいる」といいます。3匹目の亀は「わたしの前には2匹いて、もう1匹はうしろにいる」といいます。どうしてこんなことが可能なのでしょうか。

**問 14** 3人の学者が汽車に乗っています。汽車は数分間かかるトンネルを通過しますが、そのあいだは真っ暗闇です。トンネルから出たとき、3人とも同僚の顔が、窓から入り込んだススで黒くなっているのに気づき、大笑いしました。しかし突然、3人の中でも一番頭のいい人が自分の顔も汚れているに違ないと気づきます。この人はどうしてこの結論にたどりついたのでしょうか。

**問 15** コップに入っているミルクから大きじ3杯分のミルクをとりだして別のコップに入っている同じ分量の紅茶に加え、よくまざるようにかきmezます。かきmezたものから大きじ3杯分をとりだし、それをミルクのコップにもどします。さてこうしたあとで紅茶のコップの中のミルクの割合と、ミルクのコップの中の紅茶の割合とを比べたとき、大き

いのはどちらでしょうか。

\* \* \*

**問 16**  $3 \times 3$  のマス目に 1 から 9 までの数を入れて魔方陣をつくりなさい。魔方陣というのは縦、横 3 つずつのマス目の中に数字をひとつずつ入れ、縦、横、斜めのそれぞれの数の合計をみな同じにするものです。

**問 17** ある足し算の問題では数字がアルファベットにおきかえられています(同じアルファベットは同じ数字を表わし、異なるアルファベットは異なる数字を表わします)。その結果はこうなっています。LOVES+LIVE=THERE。何人の恋人たち(LOVES)がいる(THERE)でしょうか。THERE という言葉が表わす数が最大になる答えを求めてください。

**問 18** ある国の政府の諜報部が、別の国の中号で書かれたメッセージを手に入れました。それは BLASE+LBSA=BASES となっています。同じアルファベットは同じ数字を表わし、異なるアルファベットは異なる数字を表わす、ということはわかっています。2 台の巨大コンピュータにかけると、それぞれ異なる答えを出しました。2 台とも正しいのでしょうか、それとも片方のコンピュータは修理する必要があるのでしょうか。