まえがき

本書が誕生したいきさつは二〇〇二年一月二五日にまでさかのぼる。その日、ドイツ数学会(DMV)では理事会メンバーがジャーナリストたちを交えて食事会を催すことになっていた。公共メディアにおける数学のイメージについて語り合おうというのだ。その参加者の一人が、ドイツの日刊紙『ディ・ヴェルト』の科学部部長ノーベルト・ロッサウ博士だった。それから数カ月後、私は同氏に再会した。その時の会話から定期的な数学コラムのアイデアが生まれた。

私は解説が書けそうな約一五〇のテーマについてその概要を記した詳細な企画書を作った。私が提案した「五分間数学」というコラムのタイトルは了承され、デザイナーがコラムのロゴを考えてくれた。こうして二〇〇三年五月には準備が整った。最初のコラムは二〇〇三年五月一二日の『ディ・ヴェルト』の月曜版に掲載され、その後、毎週継続された。リズムが途切れたのは、月曜日が休日で『ディ・ヴェルト』が休刊の時だけだった。二年後、一〇〇回目を迎えたところで「五分間数学」は他のコラムにバトンタッチした。

私はテーマを選ぶさい、学校を卒業してからすでに相当な年月を経ていて、この科目についての具体的な記憶があまり多く残っていない読者、しかしそれでもそれについて何が書かれているのかを見てみたいと思う読者のことも念頭におくように努めた。数学といえば二次方程式の根の公式や関数グラフのことばかりなのだろうか？　そもそも数学について知りうることは、すべてもう分かっているのだろうか。「実生活」のいったいどこで数学が使われているのだろうか……。

二年間をかけて、目次に見られるように、多岐にわたるテーマを取り上げることができた。そこには現代的な問題もあれば、古典的な問題もある。簡単に分かるものも、なかなか手ごわいものもある。そして読者は多くの個所で、数学がたとえばロト［数字選択式の宝くじ］や、暗号や、ＣＴ（コンピュータ断層撮影装置）や銀行業務の評価など、われわれの生活のすみずみにまで浸透していることを知ることになるだろう。

まだコラムの連載が終わらないうちに、フィーヴェーク出版から、すべてのコラムを本の形で出版しないかとの提案があった。私は即座に了承したが、それには十分な理由があった。第一は、コラムを定期的に読んでくださった多くの読者から、そうした出版物への希望が寄せられていたことだ。第二は、コラムというものがその性格上、毎回の分量をほぼ一定に保たねばならなかったことだ。これは、いくつかのテーマについては、

良心の呵責なしにはできないことだった。それゆえ私は、本にすることでこの制約がなくなることを、うれしく思った。そして第三に——紙面が限られたコラムと違って——本であれば、言葉だけではなく、より多く視覚に訴えることができる。写真、イラスト、関数グラフ、表……。

私はこうした新しい可能性を利用するよう努めた。それによって「もともとのコラム」に比べると分量は二倍半に膨れ上がった。大幅に加筆されたコラムもかなりの数にのぼる。たとえば「ヤギ問題」(第35話)がその一例だ。そこでは、数学的な背景を一度きちんとした形で説明しておくチャンスを逸したくなかった。しかしその他のコラムは、本質的にはもとのままにした。

コラムを執筆するにあたって私が重視した観点が三つある。

数学は役に立つ。明らかにしたかったことは、現在のわれわれの科学技術世界がなぜ数学なしには機能しないのかということだ。[パソコンにはよく Intel inside などといった品質保証マークがっいているが」ほんとうはもっと多くの生産物に「数学 inside」という品質保証マークがついていてしかるべきだ。

数学は面白い。有用性のほかに、数学は特別な知的魅惑を提供してくれる。提示された問題を解きたいという癒しがたい衝動は、予想もつかないエネルギーを引き出してく

れる。

数学なしでは、世界は理解できない。 ガリレイによれば「自然という書物は数学の言葉で書かれている」。ガリレイの時代には、これは一つのヴィジョン以上のものではなかった。しかし今日われわれは数学が人間の想像力を超える領域にわれわれを連れて行ってくれる橋の役割をしていることを知っている。数学なしでは今日、世界を究極のところでつなぎとめているものを誰も認識することはできない。

私は、二年間にわたって『ディ・ヴェルト』の読者に数学上のテーマについて解説する機会を与えてくれたロッサウ氏に、この場を借りて感謝をささげたい。氏との共同作業は私のもっともよき思い出として心に残っている。

また多くの写真、特にフォトモンタージュを作成してくれたエルケ・ベーレンツにも感謝したい。また数学仲間のヴァウン・ハンセン(コペンハーゲン大学)とロビン・ウィルソン(オクスフォード大学)が写真を提供してくれたことも嬉しかった。最後に、校閲のさいに誤植をすべて発見してくれたティナ・シェーラーとアルブレヒト・ヴァイスにも感謝をささげたい。二人のおかげで、もう読者は誤植に首をかしげる必要はなくなったはずだ。

エアハルト・ベーレンツ

目　次

Ⅳ　世の中は確率で満ちている

I

いろいろな数の世界

第1話　魅惑の数学——整数

ちょっとした賞金ゲームを紹介しよう。まず適当に三桁の整数を思い浮かべていただきたい。そしてそれを二回並べて書いていただこう。つまり、皆さんが選んだ数字が761ならば紙の上には761761という数字が書かれているわけだ。さてそこでゲームの始まり。まずはこの六桁の数字を7で割っていただこう。そのときの余りが皆さんのラッキーナンバーとなる。それは0、1、2、3、4、5、6の数字のいずれかのはずだ。7で割った時の余りはこれ以外にはありえない。さてそこで、もう一度皆さんの思い浮かべた最初の数字と、今計算した余りを葉書に書き、『ディ・ヴェルト』「この数学コラムが掲載されたドイツの新聞」の編集部まで送っていただこう。そうすれば折り返し、あなたのラッキーナンバーと同じ枚数の一〇〇ユーロ紙幣があなたのもとに送られてくる……。

ひょっとして、あなたのラッキーナンバーは0だったかな。つまり割り算をしたとき、割り切れてしまっただろうか。だとすれば、それはあなただけではない。ほかの挑戦者

もみんなそうだったはずだ(さもなければ、編集部はこの記事の掲載に同意することもなかっただろう)。こういう現象が起こる理由は、その奥に秘められた整数論の性質にある。つまり、三桁の数字を二回並べて書くということは、その数字に1001を掛けるのと同じことなのだ。そして1001は7で割り切れるから、さきの六桁の数字もかならず7で割り切れるという寸法だ。

このアイデアはちょっと目先を工夫すれば、もちろんパーティ用マジックとしても使えるだろう。一〇〇ユーロ紙幣をプレゼントする代わりに、数字の余りをいい当てるという趣向でもいい。

ちなみに、数学上の事実がマジックに利用されるのは珍しいことではない。ただし、その結果は普通の人の期待を裏切るようなものでなければ面白くない。その根拠がなにかの理論の深みに隠されているものがよい。

もう一つアドヴァイス。マジックは香水と同じ。外見は中身と同じくらい重要なのだ。最初に思い浮かべてもらう三桁の数字に、1001が掛けられているということは、説明の時にけっして匂わせてはいけない。これは実のところ二回並べて書くということとまったく同値[数学的に同じ操作]なのだが、しかしこれが分かってしまうと、一番のポイントが台無しになってしまうだろう。7で割るというのを変えたい人は、11とか13でもいい。これらはいずれも1001の約数だからだ。もっともこれらの数字では、余りを出す

ための割り算がちょっとやっかいにはなるが。

さらなるヴァリエーション——10001, 100001, …

ではなぜ、書いてもらうのは三桁の整数でなければならないのか。二桁、あるいは四桁の数字でもうまくいくだろうか？

たとえば二桁の整数 n を考えてみよう。十の位を x、一の位を y として、それを二回くり返して書くと、xy から $xyxy$ という数字ができる。これは n に101を掛けたのと同値だ。ところが101は素数で、$xyxy$ の約数は xy と101ということになる。このマジックでは xy が具体的にどのような数字かはまったく分からないため、予言できることといえば101で割ったときには余りが出ないということだけだ。しかしそれではトリックが簡単に見破られてしまう。それに加えて101で割るという計算は観客にとって負担が大きすぎる。要するに二桁の数字は出発点の数字としてあまり適していないわけだ。

四桁の数字なら10001を掛けるのと同じことになる。この数字はたしかに素数ではなく $10001 = 73 \times 137$ である。しかしこの73も137も素数だ。だから四桁の数字を二回並べて八桁の数字を作れば、それはまちがいなく73と137で割り切れる。しかし73にしても、いったい誰がそんな割り算を好んでやってくれるだろうか。

ではもう一つ増やして100001という整数は、約数が11と9091。これまた計算には不

整　　数	素因数分解
101	101
1001	7・11・13
10001	73・137
100001	11・9091
1000001	101・9901
10000001	11・909091
100000001	17・5882353
1000000001	7・11・13・19・52579
10000000001	101・3541・27961
100000000001	11・11・23・4093・8779
1000000000001	73・137・99990001

向きな素数で、やはり五桁の数字も出発点として理想的ではない。こうしてどんどん進めていくと、次に小さな約数が出現するのはなんと1000000001（この整数は7で割り切れる）になってからだ。でもみんなの前でちょっとしたマジックショーをするときに、読者はこんな言葉でショーを始めたいと本気で思うだろうか。「さてみなさん、適当に九桁の数字を思い浮かべてくださいい。そしてそれを二回並べて書いてくださいい……」。やはり私のお勧めとしては、最初の案でいくことだ。

上の表は、10…01の形をとる最初の整数のいくつかを素因数分解したときの約数の一覧だ。

第2話 πの不思議

一番重要な数は何かと数学者にアンケートをとれば、円周率π（パイ）は十分、首位の座を得るチャンスがある。幾何学にとっての重要性は誰でもよく知っている。なんといっても「円周＝π×直径」という公式は小学校でもすでに大切な役割を果たしているのだから。

でも、それだけではない。円周率は、数学のほとんどあらゆる分野に――どこを探しても円などおよそ出てきそうもないような分野にさえ――出現する。円周率が確率論にとっても重要なものであることは、以前なら、一〇マルク紙幣［ユーロ導入前のドイツ紙幣。ガウスの肖像が使われていた］を見ればすぐに確認できただろう。というのも、そこには釣り鐘の形をした正規分布の曲線が描かれており、その公式の中に円周率が登場しているからだ。それは有名な数学者ガウスの業績を伝えるために選ばれたものだ。

πはまた数字としても特異な存在だ。たとえば円形の苗床にまく種の量を計算するためにπの値を公式に代入したい時などは、小数点以下何桁かの近似値を使うことができ

る。たとえば$\pi = 3.14$だ。しかし、じつは小数点以下、いくら桁数をたどっても、この数はけっして正確には記述できないこと、つまり記述するには無限に多くの桁数が必要であることがすでに証明されている。それどころかπはいわゆる超越数［有理数から代数的操作で得ることができない数（第5話）］と言われる数で、数の階層の中でももっとも複雑なものに属する。この事実はすでに一九世紀に証明されたが、ついでに言えば、それによってそれまで二〇〇〇年間未解決であった「円積法」［定規とコンパスだけで与えられた円と等しい面積をもつ正方形を作図する方法］の問題が解決された（第25話）。

このように、小数点以下すべての桁数を調べることはしょせんできないが、少なくとも、できるだけ多くの桁数を調べることはできる。これにはスポーツ選手権のようなものがあり、コンピュータの助けを借りて、洗練された理論上の結果を駆使しながら次々と新記録が樹立されている。目下のところ、数十兆桁まで知られている。πにはまだ多くの秘密が隠されており、計算によってそうした問題の解決が得られるのではないかという希望がその背景にある。

最後に一言つけくわえると、πは数学者以外の人々にもある種の魅力を放っている。「πファンクラブ」なるものがあり、何年か前には「π」というタイトルの映画まで現れた。ジヴァンシーの香水「π」をつけてこの映画を見れば、すっかりその気になれただろう。

聖書の中の π

行間を読める人なら、聖書の中にもすでに π を発見することができる。

「また海を鋳て造った。縁から縁まで一〇キュビトであって、周囲は円形をなし、……その周囲は綱をもって測ると三〇キュビトであった」(「列王紀上」第七章二三節、日本聖書教会訳)

ここで「海」と呼ばれているのは、ソロモンの神殿の前に設置された一種の聖水用水盤だ。円形のものを想像すべきで、聖書のテキストから次の情報が取り出せる。

$$\text{円周の長さ} \div \text{直径} = 3$$

これは π の近似値としては、おどろくべきほどおおざっぱな値だ。バビロン人とエジプト人はすでに $\pi \fallingdotseq 22/7 = 3.142\cdots$ という、はるかに正確な近似値を知っていた。ただ、水盤の円周は、一番上の縁のところではなく、もう少し下がったところで測定されたと考えれば、この不正確さも容易に説明がつくかもしれない。

何通りかのπの概算方法

円周率πに関するいくつかの事情は、数学の知識がほとんどなくても明らかにすることができる。たとえば正方形に内接する円を想像してみよう(図1左)。ここで円と正方形の接点の一つから、ちょうどその向かい側にある接点まで円周上に沿って移動するとしよう。その時の移動距離は円周の半分に相当する。したがってその長さは$2\pi r/2 = \pi r$となる。rは円の半径を表す。

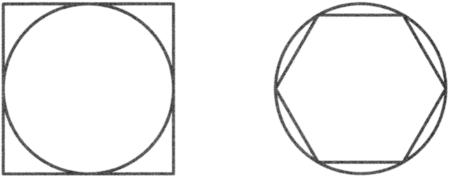

図1　πの値は4より小さく3より大きい

次にこの二点間を正方形に沿って移動したとしよう。この経路が円周を辿るよりも長くなることは明らかだ。そしてその距離はrの四倍。すなわち、πrは$4r$よりも小さいということだ。そしてこの不等式の両辺をrで割れば、πが4より小さい値でなければならないという結果が得られる。同じような手法で、πが3よりも大きくなければならないということも説明できる。この場合には、正六角形に外接する円を描く(図1右)。六角形の一つの頂点から、向かい側の頂点まで移動する場合、今度は円よりも六角形の辺に沿って進んだ方が距離は短くなる。その距離は一辺がr(円の半径)でその三つ分、すなわち$3r$にあたり、ここから$3r$がπr

よりも小さいことが分かる。したがって3はπよりも小さくなければならない。

じつはこの二つの図は、もう少し多くのことを教えてくれている。そこにはもう一歩踏みこんだ情報がひそんでいる。つまり左図の正方形の辺を辿る経路は、円を辿る経路よりもずっと長いのに比べて、正六角形の辺を辿る経路は円を辿る経路よりわずかに短いだけだ。これはすなわち、πが4よりもずっと3に近い値だということを意味している。