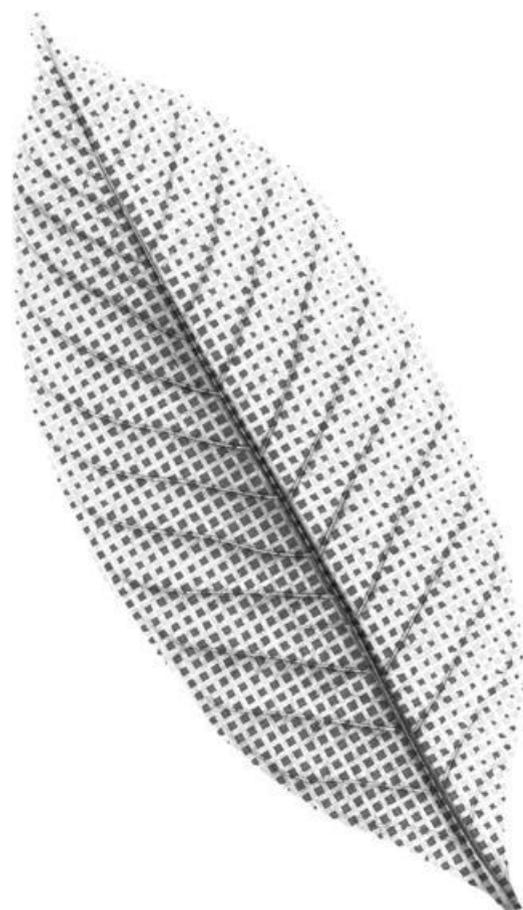


応用数理の 遊歩道

日本応用数理学会 編



岩波書店

まえがき

本書『応用数理の遊歩道』は応用数理に関わる達人の先生方の随想を集めたものである。各随想の初出は日本応用数理学会の学会誌「応用数理」であり、このたびそれらを一冊にまとめて日本応用数理学会の創立 25 周年記念出版として刊行する運びとなった。

数学の論文を書くとき、論文のテーマに没頭して昼も夜もなく研究を続けることがある。起きていられるだけ起きて考え、疲れ果てると寝る。このとき、大抵、数学的な難所を乗り越えられずにいるので、寝ている間も考え続けている。すると、何やらねじが外れてフワフワと考え始め、とんでもない道に気がつき、そして飛び起きる。このとき、夢で見たものは解にはなっていないことが多い。しかし、検討を進めてみると、夢の中で見たような方向の中で解を思いつくことがほとんどとなる。したがって、一晩寝ると難所が一つ越えられる。難所が 30 カ所あれば、これを毎日繰り返して 30 日経つと論文ができる。難所が何カ所あるかは問題によって異なるが、1 カ月で論文ができるときもあれば 2 カ月、3 カ月とかかることもある。本当に、普通生きている日々とは異なる夢うつつの生活となる。

数学の論文を書くのには、この隠者になったような生活が必要となることがある。一方、散歩をしていると日頃の課題について考えが巡り、いろいろなアイデアが溢れ出てくることがしばしばある。余りに熱中して考え過ぎて、どこに行っているのか分からなくなり、目的地を越えてしまうことさえ起こる。『応用数理の遊歩道』は、隠者のようになって論文を書くために役立つ本ではなくて、応用数理の達人たちが、応用数理に関わる課題について、散歩しながら考えを巡らしているさまが描かれていると表現してよいと考えている。散歩の中でのアイデアの噴出のさま、あるいは、読者の皆様が見とれるような応用数理の景観が、様々に描かれている。

日頃、忙しく机に向かって仕事をしているのを、ふっと休んで、『応用数理の遊歩道』を手にとっていただき、その散歩を楽しまれることを期待したい。

本書は政策研究大学院大学の土谷隆先生が編集されたものである。厚く御礼申し上げます。また、出版に当たり全面的にご協力いただいた岩波書店編集部に衷心より感謝したい。

2016 年 6 月

日本応用数理学会会長
大石 進一

目 次

まえがき

1 杉原 厚吉

- | | |
|---------------------------------|------------------------|
| (1) 部屋を实际より
広く見せる写真術 …………… 1 | (3) 一枚の絵による立体視 …………… 8 |
| (2) 不可能物体の作り方 …………… 4 | (4) 幻の研究テーマ …………… 11 |

2 一松 信

- | | |
|---------------------------|-------------------------|
| (1) 数学者の論理に合った電卓 …………… 15 | (3) 実験を通した数学教育 …………… 22 |
| (2) 三角形と四面体 …………… 18 | (4) 数値積分に関する注意 …………… 26 |

3 山口 昌哉

- | | |
|-----------------------------------|--|
| (1) ジョージ・ブールの生涯 …………… 30 | (3) 思考の法則の研究
——ジョージ・ブールの生涯 …………… 37 |
| (2) ジョージ・ブールの
数学と社会事業 …………… 33 | (4) ジョージ・ブールの生涯——Boole の詩,
キュビエリアンソサイエティ, 家族 …………… 40 |

4 伊理 正夫

- | | |
|-----------------------------|----------------------------------|
| (1) 次元と行列に関する随想 I …………… 44 | (3) 応用数理に関連する
言語的諸問題 …………… 54 |
| (2) 次元と行列に関する随想 II …………… 49 | |

5 赤池 弘次

- | | |
|---|-------------------------------------|
| (1) 統計的思考と応用数理
——前提となるモデル化の技 …………… 64 | (3) 統計的思考と応用数理
——偏見との闘い …………… 70 |
| (2) 統計的思考と応用数理
——形式的な確率的構造の利用 …………… 67 | (4) 統計的思考と応用数理
——意図と構造 …………… 73 |

6 二宮 市三

- | | |
|---|-------------------------|
| (1) 流体力学からブール代数へ …………… 76 | (3) 計算機とともに …………… 86 |
| (2) 電子計算機との出会いから
ゾロタレフの遺産まで …………… 81 | (4) 数値計算にこと寄せて …………… 91 |

7 甘利 俊一

- | | |
|------------------------|-------------------------|
| (1) 数理工学を求めて …………… 96 | (3) 情報幾何の生い立ち …………… 104 |
| (2) 神経回路網の数理 …………… 100 | (4) 独立成分解析 …………… 108 |

8 有本 卓

- | | |
|---|--------------------------------------|
| (1) 現場の技術開発から見つけた
数理科学の一断面 …………… 112 | (3) 通信路符号化をめぐる先陣競争 …… 119 |
| (2) 情報と制御の数理科学 …………… 115 | (4) 数理科学はロボット知能を
展開できるか …………… 123 |

9 森 正武

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| (1) 応数八景そぞろある記(1) …………… 128 | (3) 応数八景そぞろある記(3) …………… 136 |
| (2) 応数八景そぞろある記(2) …………… 132 | (4) 応数八景そぞろある記(4) …………… 140 |

10 鳥居 達生

- | | |
|------------------------------|----------------------------|
| (1) 一隅を求めて …………… 145 | (3) FFT による数値積分法 …………… 152 |
| (2) 離散型 Fourier 変換 …………… 149 | (4) 孫子定理とその周辺 …………… 156 |

11 柏木 寛

- | | |
|------------------------------|--|
| (1) 地の章 「公」と「私」 …………… 160 | (3) 火の章 禅科学のすすめ(2) …………… 168 |
| (2) 水の章 禅科学のすすめ(1) …………… 164 | (4) 風の章 禅科学のすすめ(3)
—いくつかの提案 …………… 172 |

12 武田 康嗣

- | | |
|---|---|
| (1) 自己紹介：研究者から経営者に …… 176 | (3) 社長として会社再建奮戦記
—応用数理は製造業経営の土台 …… 184 |
| (2) イノベーション・システムの
ビッグバン
—日本応用数理学会創設の時代背景 …… 180 | (4) 企業経営者の立場から
応用数理学会への期待 …………… 188 |

13 茨木 俊秀

- | | |
|--------------------------------------|--|
| (1) NP 困難性の 35 年：その誕生 …… 192 | (3) NP 困難性の 35 年：
P と NP のはざままで …………… 200 |
| (2) NP 困難性の 35 年：
広がる世界 …………… 196 | (4) NP 困難性の 35 年：
克服への道 …………… 204 |

14 三井 斌友

- | | |
|---------------------------------------|---|
| (1) 数値解析の散歩道：
数値解析は死んだか？ …………… 208 | (2) 数値解析の散歩道：
60 年を経た「来し方」 …………… 212 |
|---------------------------------------|---|

- (3) 数値解析の散歩道：
わが国の数値解析の歩み …………… 215

- (4) 数値解析の散歩道：
これからを見通す …………… 218

15 松宮 徹

- (1) 私の履歴と応用数理 …………… 221
(2) 鋼の連続鑄造における
力学的挙動解析 …………… 225

- (3) 計算熱力学の社内活用 …………… 229
(4) 原子・電子レベルの
計算材料科学 …………… 234

16 矢川 元基

- (1) スーパー
コンピューティング …………… 238
(2) スーパー
コンピューティング(続) …………… 242

- (3) 安全・安心と
シミュレーション科学 …………… 246
(4) 計算科学技術雑感 …………… 250

17 田邊 國士

- (1) 数理科学の一学徒の弁明 …………… 254
(2) 軸選択つきガウス消去法は
唯一の選択か？ …………… 258

- (3) ラグランジュ関数とは
いかなる関数か …………… 263
(4) 帰納という原罪 …………… 268

18 薩摩 順吉

- (1) 数理に生きて——学生時代 …………… 274
(2) 数理に生きて——教員時代 …………… 278

- (3) 数理に生きて——研究のこと …………… 282
(4) 数理に生きて——教育のこと …………… 286

19 木村 英紀

- (1) なぜ制御理論を選んだか？ …………… 290
(2) 動的システムの双対性 …………… 294

- (3) 巨大モデルと予測 …………… 298
(4) 「忘れられた科学：数学」
その後 …………… 302

20 岡本 龍明

- (1) 暗号における数理モデル …………… 306
(2) 暗号における情報量 …………… 311

- (3) 暗号通貨 …………… 315
(4) これからの暗号 …………… 319

21 堤 正義

- (1) 回想 …………… 323
(2) 回想(2) …………… 327

- (3) 回想(3) …………… 331
(4) 回想(4) …………… 335

部屋を実際より広く見せる写真術

1 視点のトリック

マンション広告の写真などに写っている部屋は、一般に実物より広く見える。説明では12畳のダイニングキッチンとあるのに、「12畳ってこんなに広かったっけ」と驚くような写真が載っていたりする。これはなにももっと広い別の部屋の写真とすりかえてあるわけではない。本物の部屋を撮影したにもかかわらず、それよりずっと広い印象を与える方法というものが存在するのだ。それは、写真を撮影するときの視点位置と、その写真を眺めるときの視点位置の違いを利用するというトリックである。

まずは実例をご覧ください。図1は、私の部屋を、入口の壁に背中をくっつけて撮ったものである。入口の壁から窓までの実際の距離は5.5mである。しかし、この写真からは、奥行きはもっとあるような印象を受けるであろう。

なぜそのような印象を受けるかという、撮影の際に焦点距離の非常に短いレンズを使ったからである。この写真を撮影した状況と、この写真を見て奥行きを知覚する過程とを、少々誇張して示したのが図2である。この図の点Aをレンズ中心として室内風景を平面 Π へ投影したとしよう。標準レンズとよばれているレンズの焦点距離が50~55mmであるのに対して、ここでは焦点距離が20mmのレンズ(このように焦点距離の短いレンズは広角レンズとよばれる)を使ったか



図1 筆者のオフィス
(焦点距離20mmのレンズで撮影)

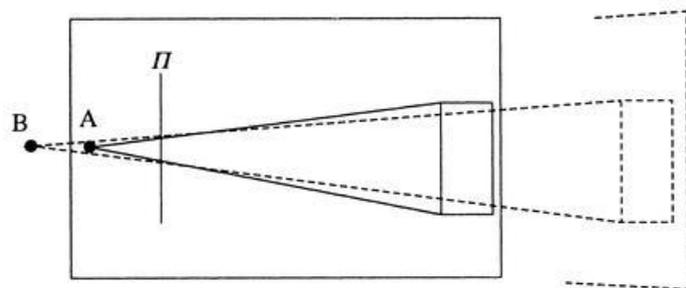


図2 視点の移動による奥行き誇張

ら、点Aと平面 Π の距離は通常の写真よりかなり短い。

一方、写真を見るときには、標準レンズのレンズ中心の近くに視点を置くと仮定すると、Aよりもっと距離の離れた点Bあたりに視点を置くことになるであろう。点Bに視点を置いた場合に写真から奥行きを復元する過程を示したのが、図の破線である。この図のように、Bを中心として Π の中の像を延長するが、人は机などの一般的な大きさを知っているから、その大きさになるまで奥行き方向へ延長すると、ここに示すように、実際よりずっと遠い位置に机などを復元してしま

うのである。

このことから、逆に、標準レンズより焦点距離の長いレンズ(そのようなレンズは望遠レンズとよばれる)を使って撮影した写真では、奥行きが実際より浅く知覚されることもわかる。その場合には、図2の点Bで撮影した写真を、点Aに視点を置いて眺めることになり、実際の奥行きが破線のようなものであるのに、それを実線のように知覚してしまうのである。マラソンや野球などのテレビ中継で、選手同士の間隔などの奥行きが異常に短かく感じられたりするの、このためである。

2 正しい視点位置は一つしかない

では、レンズの焦点距離をどんどん短かくしていくことによって、部屋をいくらでも広く見せることができるだろうか。実はそういうわけにはいかない。なぜなら、撮影のときのレンズ中心とは異なる位置に視点を置くと、奥行きが変わるだけでなく、立体の形自身も変わるため、焦点距離が短かすぎると不自然な写真になってしまうからである。このことを理解するために、まず、写真撮影の幾何学を復習しよう。

カメラのレンズを理想的なピンホールとみなすと、撮影操作は中心投影とよばれる図の描き方に相当する。図3に示すように、一つの平面 Π と、 Π には含まれない1点Eを固定する。空間の各点Pに対して、直線EPと平面 Π との交点Qを対応させる操作を、中心投影という。Eを、この中心投影の投影中心(または視点)といい、 Π を投影面という。また、Qを、この中心投影による

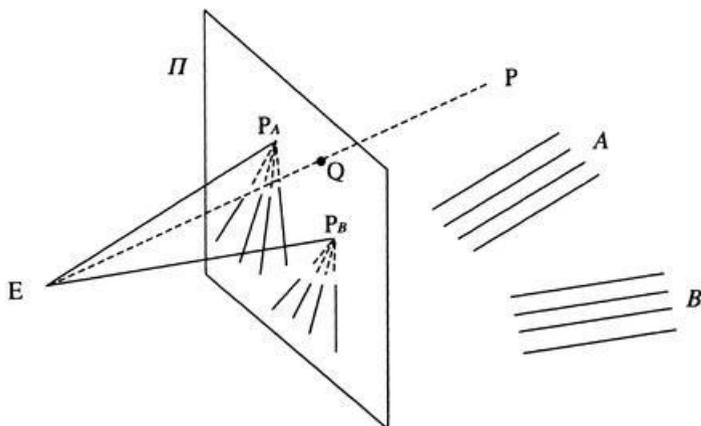


図3 平行線群とその中心投影

Pの像という。

空間で互いに平行な直線の集合Aの像は、1点から放射状に出る直線群A'となる。A'の共通の交点P_Aを直線群Aの消点という。P_Aは、Eを通りAに平行な直線がΠと交わる点である。もう一組の平行線群Bの消点をP_Bとすると、AとBのなす角度は、 $\angle P_A E P_B$ と一致する。

以上のことを念頭において、図4の実線の絵を見てみよう。これが直方体の中心投影像であるとすると、その投影中心Eは一義的に決まる。このことは、次のように考えればわかる。図の破線で示すように、3組の平行線群がそれぞれP, Q, Rを消点にもつ。直方体の互いに隣り合う稜は直交するから、 $\angle PEQ = 90^\circ$ である。したがって、視点Eは線分PQを直径とする球面の上にある(円の直径の上に立つ円周角が 90° であることを思い出していただきたい)。同様に、Eは線分QRを直径とする球面の上にもあり、線分PRを直径とする球面の上にもある。すなわち、Eはこれら3個の球面の交点である。そして、その点は図4の中央の頂点から紙面に垂直な方向へ図の右下の線分の長さだけ離れた位置である。

このように、図4の図形が直方体の正しい投影図となるための視点位置は一つしかない。ということは、逆にこの図から直方体を復元することのできる正しい視点位置が一つしかないということでもある。私たちがこの記事を読むときには、眼を紙面から25~30cm位離すであろう。そのよ

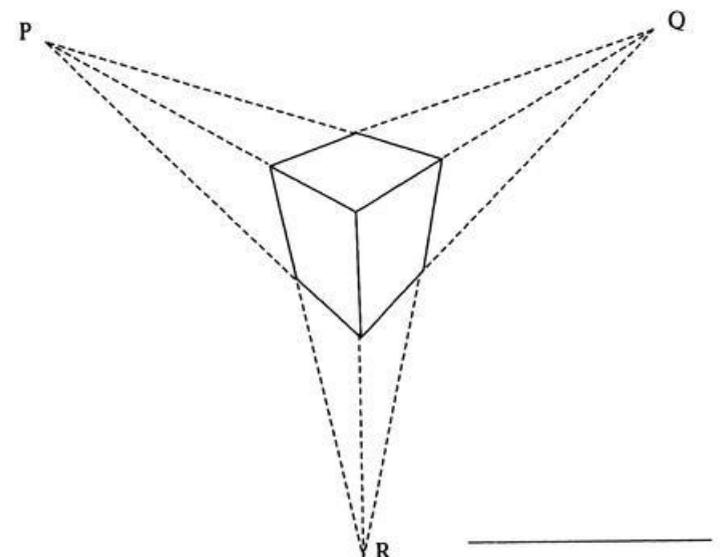


図4 直方体の中心投影図

うな眼の位置は、図4から直方体を復元するための正しい視点位置とは相当に違い違っている。もっとずっと眼を紙面に近づけなければ、直方体を正しく知覚することはできないはずである。

同様に、図1の写真から奥行きが実際より深く復元されるときには、立体の形自身もゆがんで復元されていることになる。

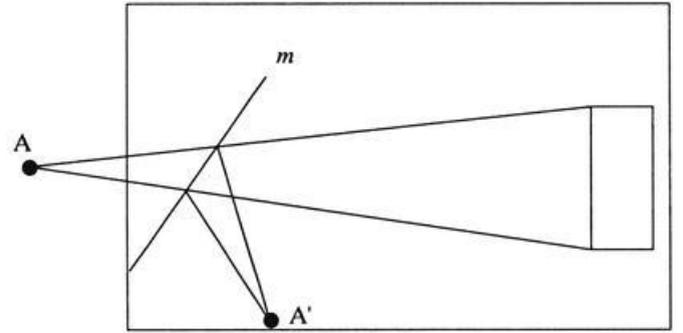


図5 ひずみなしで奥行きを誇張する方法

3 視点位置の心理的な補正

写真からもとの立体を正しく復元——知覚——できる視点は、一つしかない。したがって、たとえば映画館で撮影シーンを正しく復元できる座席は高々一つだけのはずである。にもかかわらず、実際には、多くの座席に座った観客が、何の不満もなく映画を楽しむことができる。なぜだろうか。それは、視点位置を心理的に補正しているからだと思われる。

映画館が混んでいて、最前列の端のほうの席などに座らざるを得ないときでも、はじめのうちこそ人の顔が細長く見えて不自然であるが、しばらくすると、その不自然さを忘れて映画の中にのめり込むことができる。これは、正しい視点位置とは別のところから映画を見ても、正しい視点位置から見たらこうなるだろうという補正を無意識のうちには人はやってしまうからだと思う。

映画の場合にこの補正がうまくいくのは、画像が動きを伴っているからだと思われる。投影面上での像の動きは、もとの立体を復元するための手がかりをたくさん含んでいる。この動きが大きな情報となって、視点位置の心理的な補正がかなり柔軟にできるのである。

一方、写真のような静止画では、この心理的補正には限界がある。この限界を越えるほど、撮影するときの視点と写真を見るとききの視点とが異なると、立体を正しく復元することはできなくなる。この限界ギリギリ付近を利用しているのが、不動産広告写真である。

4 ひずみのない写真を撮るためには

では、広角レンズを使った場合のようなひずみを生じさせないで、奥行きだけを実際より深く見せる撮影法はないものであろうか。実はある。実際に被写体から十分な距離だけ離れた位置にカメラを置き、標準レンズで撮ればよいのだ。私のオフィスの場合であつたら、図5に示すように、入口側の壁を壊して点Aの位置にカメラを置けばよい。

もちろん壁を壊すことなど簡単にはできないが、たとえばコンピュータグラフィックスの技術を使ってまだできていない部屋の完成予想図を作る場合には、これと等価なことが簡単にできる。入口側の壁はないものと思って計算すればよい。

また、すでに完成している部屋を撮る場合にも、壁を壊すことなく、壁の外にカメラを置いたのと等価な状況を作り出すことができる。そのためには鏡を利用すればよい。図5のmの位置に大きな鏡を立て、点A'にカメラを置いて鏡に映った風景を撮影すれば、点Aにカメラを置いた場合と同じ写真が得られる。ただし、こんな方法で撮った写真をマンション広告などに載せたら、明らかに詐欺であろう。

不可能物体の作り方

1 不可能物体とは

だまし絵とよばれる絵の中には、見た人が“立体の構造を知覚すると同時に何か変だと感じる”ものがある。このような絵が人の心に引き起こす“立体の印象”のことを「不可能物体」とよび、不可能物体を引き起こす絵のことを「不可能物体の絵」とよぶ。図1に示したのが、不可能物体の絵の例である。

このような絵は、視覚心理学の分野で、人の立体知覚の機構をさぐるための実験材料として古くから使われている。また、コンピュータビジョンの分野では、物体認識プログラムが画像から立体を正しく抽出できるか否かをためすための“いじわるデータ”として使われているし、芸術の分野では、エッシャーや安野光雅などの版画家・画家によって、作品作りの素材として利用されている。

「不可能物体」という名称は“心の中に印象として生じるだけで、物理的には実在し得ない”という意味でつけられたのであろう。しかし、上で見たとおり、その定義ははなはだ心理学的——言いかえると、非数学的——であり、数理的な立場から眺めると、必ずしも実在しないというわけではない。不可能物体の中には立体として作れるものもあるのである。以下では、実現可能な不可能物体の見分け方とその作り方を考える。

2 立体実現問題

図1の絵を投影図とする立体が作れるかという問いに対して、いじわる問題の得意な人なら、「針金細工として作れる」とか「このような絵を落書きした大きな板として作れる」というずるい答をいくらでも考え出せるであろう。それを防ぐために、まず、考える土俵をはっきりさせなければならない。ここでは、次のように仮定しよう。

仮定1 (対象物体) 対象として考える物体は、不透明な物質で作られた多面体(有限個の平面多角形だけで囲まれた3次元有界領域: 凸であるとは限らない)である。

仮定2 (描き方) 絵は、物体の稜線の見える部分だけを描いた中心投影図または平行投影図である。

仮定3 (目の位置) 3次元空間において互いに異なる稜線や頂点が、絵の中で同一の位置を占めることはない。

仮定4 (隠された部分) 隠れて見えなくなっている部分に、特に複雑な構造はない。

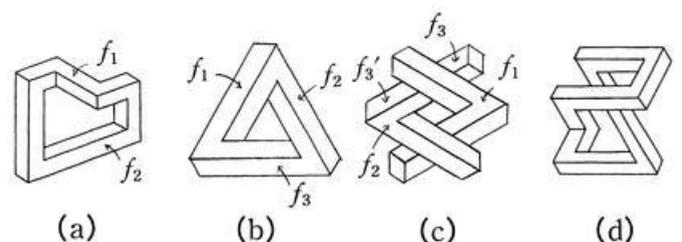


図1 不可能物体の絵

仮定4は数理的な表現ではないが、これは、見えない部分は常識で想像したとおりの構造をもっているという意味である。したがって、たとえば、図1(c)の f_3 と f_3' は見えない部分でつながった同一の面であって、途中で切断されていたりはしない。これらの仮定のもとで、図1のそれぞれの絵を実現する立体が作れるか否かを考えてみよう(次節の答を見る前に皆さんも考えてみて下さい)。

3 答

図1の絵に対する立体実現問題の答は、「(a)と(b)は実現不可能、(c)と(d)は実現可能」である。(a)においては、図中の面 f_1 と f_2 が2本の稜線を共有し、それらが同一直線上にはない。これは、平行でない二つの面はただ1本の交線をもつというユークリッド幾何の性質に反する。したがって、このような立体はあり得ない。(b)においては、3個の面 f_1, f_2, f_3 の二つずつの交線3本は1点を共有していない。このことは、互いに平行ではない三つの平面が空間で1点を共有することに反する。したがって(b)の立体もあり得ない。

(c)の絵では、二つの立体が組み合わされているが、図2に示すように、それらを切り離せば、個々の物体が二つの角柱を直角につないでできることはすぐにわかる。問題は、この二つの立体が図1(c)では前後関係が逆転しているかのように組み合わされているところにある。確かに、図2を、長方形の断面をもった二つの角柱を直角につないで作った立体と解釈すると、図1(c)のように組み合わせることはできない。しかし、図2が表わす立体は一義的ではなく、無限に多くのものがある。そして、その中には、図1(c)のような

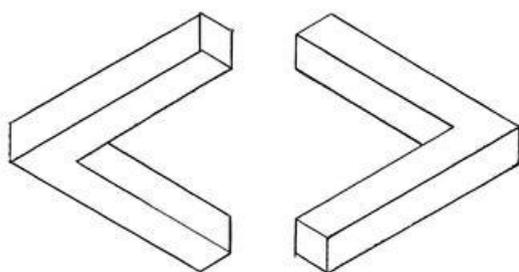


図2 図1(c)を構成する二つの立体

組み合わせ方を可能にするものも含まれているのである。このことを理解するために、一つの絵が表わし得る多面体の自由度を見てみよう。

簡単のために、 xyz 正規直交座標系に固定された多面体 X の xy 平面への垂直投影図として、絵 D が与えられたとしよう。 X に属する任意の点 p の座標を (x, y, z) とし、変換

$$\begin{aligned} x' &= x, & y' &= y, \\ z' &= \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta \end{aligned} \quad (1)$$

によって移された点を $p'=(x', y', z')$ とする。ただし、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は $\gamma > 0$ を満たす定数である。この変換操作を $p'=T(\alpha, \beta, \gamma, \delta)p$ と書くことにする。変換(1)は一次変換であるから、これによって、直線は直線に、平面は平面に移る。また、 p と p' の x 座標と y 座標は一致するから、投影図の上では同じ位置を占める。したがって p が X の中を動くとき、 p' が動く領域

$$X' = \{p' \mid p \in X, p' = T(\alpha, \beta, \gamma, \delta)p\}$$

はやはり多面体であり、しかも D を投影図にもつ(X から X' に移ったとき見える稜線と見えない稜線が逆転しないことは、 $\gamma > 0$ によって保証される)。このように、絵 D を投影図とする立体 X が一つ見つければ、それを上のように変換して得られる多くの立体 X' が、同じ投影図をもつ立体としてもづる式にいくらでも得られるのである。パラメータ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ のうち δ は z 軸方向の平行移動を表わすから除外するとして、残りの3個のパラメータを $\gamma > 0$ の範囲で任意に選べるだけの自由度を立体はもっているのである。

これらの自由度を利用すると、図2の左側の立体は上が奥で下が手前、右側の立体は上が手前で下が奥となるように選ぶことができる。そして、それらを組み合わせれば図1(c)に一致する立体構造が作れるのである。

このようにして得られる立体の展開図のコンピュータで作った一例が図3である。ただし、図中の f_1, f_2, f_3 は図1(c)の面 f_1, f_2, f_3 に対応し、2種類の大きさの黒丸は、二つの立体を組み合わせるとき接触させるべき点の位置を表わす。この図の

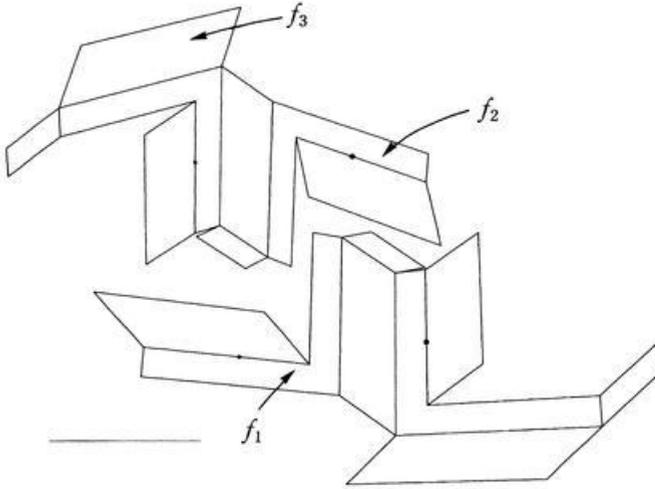
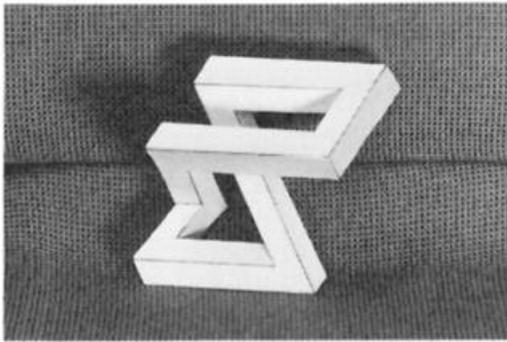
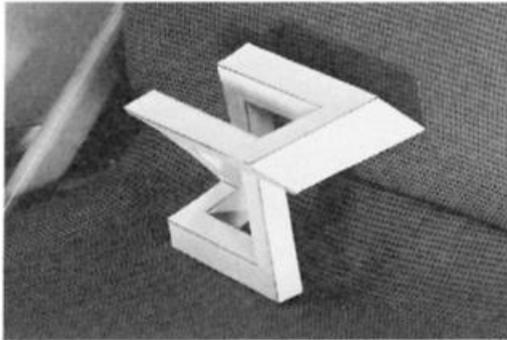


図3 図1(c)の立体の展開図



(a)



(b)

図4 図1(d)を投影図にもつ立体

左下の水平線分の長さが10 cm になるように拡大してから組み立てた立体を、約2m離れたところから見ると、図1(c)と同じ投影図が得られる。

図1(d)の立体も作れる。その理由は皆さんに考えていただくことにして、ここでは、作れるという“証拠”を、作った立体の写真の形で図4に掲げる。(a)は、その立体を、図1(d)と同じ投影図をもたらし方向から撮ったもので、(b)は同じ立体を別の角度から撮ったものである。

ところで、図1(c)や(d)は正しく立体を表わしているのに、なぜ不可能物体の絵の中に分類され

るのであろうか。それは、これらの絵をみたとき、人は、長方形の断面をもった角柱の部材を直角に組み合わせてできる立体を思い浮かべるからであろう。そのような範囲に立体を限れば、確かにこれらの図を実現することは不可能である。実は、人が無意識のうちに思い描く対象世界よりもっと広い世界を、仮定1として勝手に設定したからこそ、上のように不可能物体を作ることができるようになったのである。その意味では、この節の答もずるい答の中に入るのかもしれない。

4 一般論について

上では、個々の絵に対する個別の議論によって多面体の実現可能性を考えた。しかし一般論もすでにできている。すなわち、与えられた絵を投影図にもつ立体が存在するか否かを判定する手続きが知られている。その全貌をここに述べる余裕はないが、さわりだけ紹介しよう。

この問題は数学的にはやさしいが工学的には難しい。

多面体の頂点の座標と面の方程式の係数とを変数にとると、求める立体はある線形方程式・不等式系の解の集合と一致する。したがって、その系が解をもつか否かを調べることによって、与えられた絵が立体を表わしているか否かを厳密に判定できる。すなわち、数学的には簡単に解けてしまう。

しかし工学的観点から見ると、この判定法は厳密すぎてほとんど意味をもたない。たとえば、人間だったら、図5の実線の絵から、「三角錐の上部を平面で切断して取り除いた立体」という構造を抽出できる。しかし、上の判定法では解はない——したがって正しく多面体を表わしていない——という答が得られてしまう。この答は数学的には確かに正しい。なぜなら、これが三角錐の上部を取り除いた立体なら、三つの側面を延長すると空間の1点で交わるはずであり、したがって、側面の3本の稜線も延長すると1点で交わらなければならないのに、図に破線で示すように、そうは

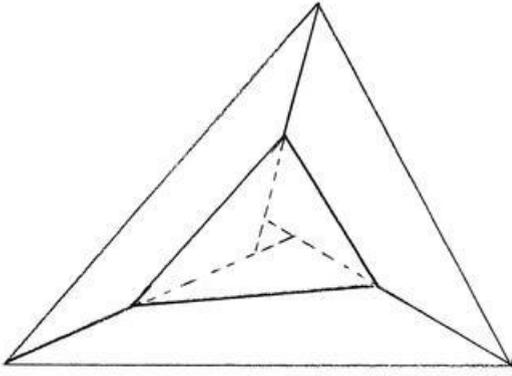


図 5 ほぼ正しいが厳密には正しくない
投影図

なっていないからである。絵の中の頂点の座標を計算機にデータとして与えるときには、デジタル化の誤差が生じるから、人の眼に正しく見える絵であっても厳密な意味では正しくないものになってしまう。それを正しくないとと言われてもちっともうれしくないのである。

したがって、工学的にはさらに解析が必要である。正しくないという判定結果が、頂点位置のわずかなずれだけによるものなのか、あるいはもっと本質的な誤りによるものなのかを見極めなければならない。そして前者であれば、正しい絵であると判定結果を変更しなければならない。数理的な処理をさらに深く進めることによってこれが可能になるのであるが——そしていよいよここからが数理工学としての佳境に入るのであるが——、残念ながら紙数も尽きたので、この先は文献[1]にゆずる。

参考文献

- [1] 杉原厚吉, 不可能物体の数理, 森北出版, 1993.

一枚の絵による立体視

1 両眼立体視

人は目を二つもち、目の前の対象を右目で見たときと左目で見たときの見え方の違いから、その対象までの奥行きを知覚することができる。この機能は、両眼立体視とよばれる。

これを利用すると、平面図形を使って立体を表示することができる。この立体表示法では、図1(a)に示すように、通常は図形を2枚用いる。一つは右目用、もう一つは左目用で、それらをそれぞれの目で見たとき立体像が融合できるように配置する。

ところが最近、1枚の図形だけを用いて立体視を行なう方法が流行している(たとえば[1])。この立体視図形は autostereogram とよばれている[2]。正式な日本語名はまだないように見えるが、ここでは仮に“自己対型立体視図形”とよぶことにしよう。自己対型立体視図形は、単に右目用の図形と左目用の図形を重ねただけではできない。なぜなら、左右の図形を単純に重ね合わせると、図1(b)の破線で示すように、右目用の図形が左目にも見え、左目用の図形が右目にも見えてしまうから、融合しない部分——これはゴーストとよばれる——が生じて、立体の知覚が不自然になるからである。自己対型立体視図形を作るためには、要するにこのようなゴーストが生じないようにすればよい。

2 立体視図形の種類

従来の型のものにも自己対型のものにもいくつかのバリエーションがある。それらのバリエーションを決める第一の要素は、表示したい立体形状と図形に描かれるものが一致しているか否かである。一致している場合には、片目で見ても——左右の図が融合しなくても——何が表示されているかがわかる。おもしろいのは、これが一致していない場合である。平面図形としてはランダムなドットパターンや幾何学模様などが描かれているのに、ひとたび左右の像が融合すると新しい形状が浮かび上がってくる。初めてこれを経験したときには感動すら覚えるほどである。だからこの稿でも、立体形状とは無関係な模様を用いることにする。

バリエーションを決める第二の要素は、表示できる奥行きが離散的か連続かの違いである。たとえばたてよこに規則的に並んだ小正方形の一つ一つをランダムに白と黒で塗りつぶして作る立体視図形では、本質的に離散的な奥行きしか表現できない。この作り方は文献[2]にゆずることにして、ここでは連続な奥行きを表現する方法を考える。

3 立体視図形の作り方

右目と左目をそれぞれ点とみなし、それらを P_R, P_L で表わす。図1(b)に示すように、両方の目を含む一つの平面 S と立体視図形の描かれる

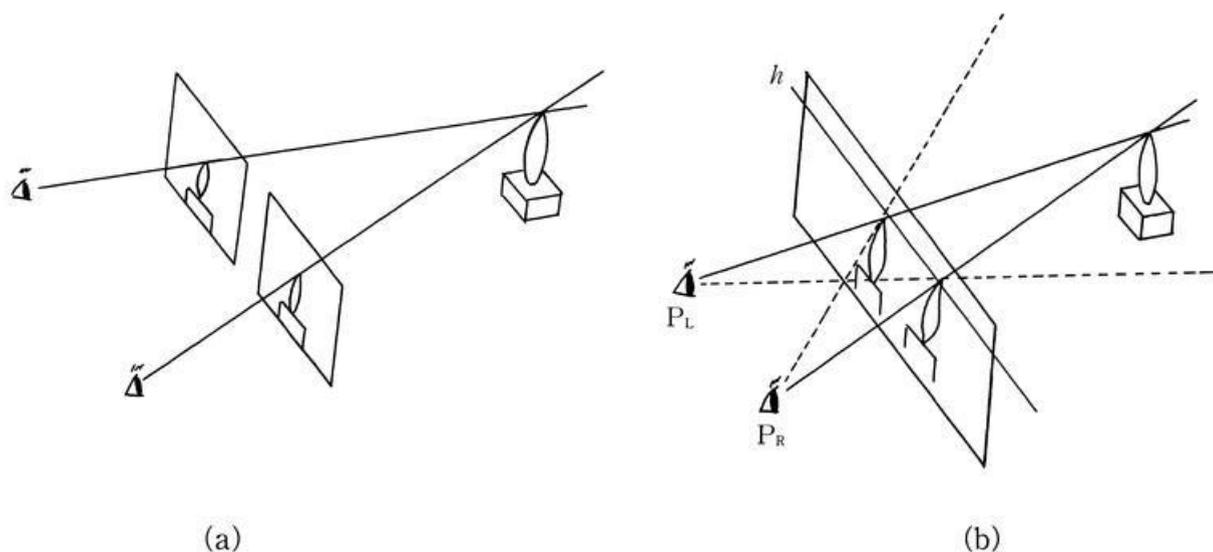


図1 両眼立体視：(a)図形対型；(b)自己対型

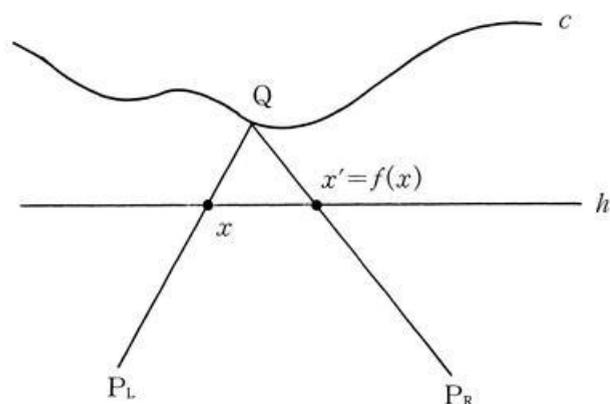


図2 知覚すべき立体 c から決まる関数 f

べき平面との交線を h とする。平面 S を上から見たところを図2に示す。この図に示すように、表示したい立体の表面と平面 S の交線を c とする。いま、2点 P_R, P_L 、直線 h 、曲線 c が与えられたとしよう。右目を P_R 、左目を P_L においたとき、曲線 c で表わされる奥行きが知覚できるような自己対型立体視図形を、直線 h の上に描くことが、ここでの目標である。

図2の直線 h に沿って、右の方向が正となる x 座標を設ける。 h 上の任意の点を x とし、 P_L から x の方向へのばした半直線が c と初めて交わる点を Q とする。さらに、 Q と P_R を通る直線と h との交点を x' とし、 x に x' を対応させる関数を f で表わす： $x' = f(x)$ 。

立体視図形を描くべき h 上の区間を $[a, b]$ とする。簡単のために、 $a \leq x \leq b$ において f は連続で単調増加な関数であるとする。これは直感的には、曲線 c が連続で、かつ c 上のすべての点

が c の他の部分に遮られることなく左右両方の目から見えることを意味している。このとき、 f は逆関数をもつから、それを f^{-1} で表わす： $x = f^{-1}(x')$ 。

h 上の立体視図形は濃淡値 $g(x)$ で指定することにしよう。すなわち、 $g(x)$ の値が小さいほど点 x は黒っぽく、 $g(x)$ の値が大きいほど点 x は白っぽくなるように、濃淡図形を生成する。もし、白と黒の2値の図形にしたかったら、たとえば黒い部分は $g(x) = 0$ 、白い部分は $g(x) = 1$ とすればよい。

さて、図2の点 Q に立体像が知覚されるためには、左目で見た点 x の濃淡値 $g(x)$ と右目で見た点 x' の濃淡値 $g(x')$ とが等しくなければならない。すなわち

$$g(x) = g(f(x)) \quad (1)$$

である。したがって、 $a \leq x, f(x) \leq b$ を満たすすべての x に対して式(1)が成り立つように濃淡図形を生成すればよい。ここまでわかれば、次のような簡単な手続きによって、実際に自己対型立体視図形 $g(x)$ を作ることができる。

まず区間 $a \leq x < f(a)$ に対しては、濃淡図形 $g(x)$ を任意に選ぶ。次に、区間 $f(a) \leq x < f(f(a))$ に対しては、 $f^{-1}(x)$ における濃淡値がすでに決まっているから、これを利用して

$$g(x) = g(f^{-1}(x)) \quad (2)$$

とおく(図3参照)。次に、区間 $f(f(a)) \leq x <$

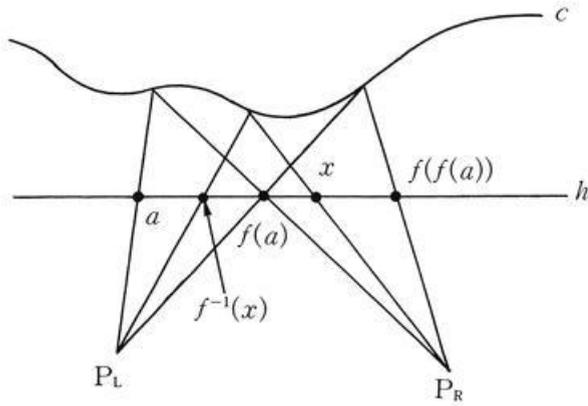


図3 立体視図形の作り方

$f(f(f(a)))$ に対しては、やはり $f^{-1}(x)$ における濃淡値がすでに決まっているから、それを利用して式(2)によって $g(x)$ を定める。以下同様に式(2)をくり返し利用する。

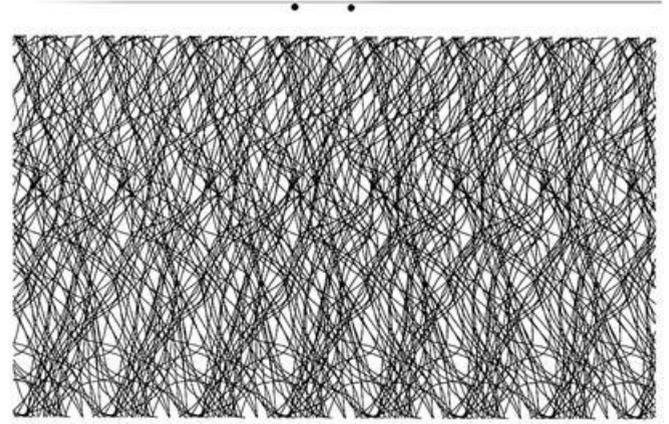
このように、 $a \leq x < f(a)$ で任意の濃淡値を与えたあとは、それを写像 f でくり返し写して行って、区間 $[a, b]$ を覆えば目的の立体視図形ができる。ただしこのままでは $x=f(a)$, $f(f(a))$, ... の点において濃淡が不連続に変わる。これを防ぎたいときには、最初の区間 $a \leq x < f(a)$ で与える濃淡 $g(x)$ が

$$\lim_{x \rightarrow f(a)^-} g(x) = g(a) \quad (3)$$

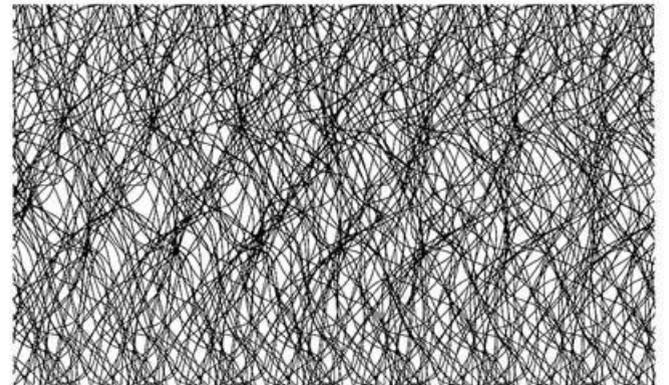
を満たすようにすればよい。

この方法で作った立体視図形の例を図4に示す。(a)は一つのなめらかな曲面が知覚されるように作ったものである。図の上部にある二つの黒丸の間隔は、図2の曲線 c 上の平均的な奥行の点 Q に対応する x と $f(x)$ の距離を表わす。したがって、左の黒丸を左目で、右の黒丸を右目で見るように視線方向を定めると立体が知覚されやすくなる。

一方、図4(b)は、上の方法で作った2枚の立体視図形を重ねたものである。そのため、2枚の異なる曲面が同時に知覚できる。この方法で、3枚、4枚、等の曲面を知覚するための立体視図形を作ることも理論的には可能であるが、実際に作ってみると目への負担が大きすぎて、自然な知覚は得られなかった。



(a)



(b)

図4 自己対型立体視図形の例

本稿では、 f が連続な単調増加関数の場合を考えた。そうでない場合——すなわち曲線 c 上の点 Q で、片方の目からは見えるが、もう一方の目からは c の他の部分に遮られて見えないものがある場合——には、片方の眼だけから見える部分に対しても、区間 $a \leq x < f(a)$ と同じように濃淡値を勝手に与えてやればよい。詳細は皆さんで考えてみて下さい。

参考文献

- [1] 根本, 他(編), CGステレオグラム1, 2, 3, 小学館, 東京, 1992, 1993.
- [2] Thimbleby, H. W., Inglis, S., and Witten, H., Displaying 3D images—Algorithms for single-image random-dot stereograms, IEEE Computer, Vol. 27, No. 10(1994), 38-48.

幻の研究テーマ

1 コンピュータビジョンにおける一つの“研究”例

図1のような線画を見たとき，そこに描かれている立体の構造を私達は何の苦もなく読み取ることができる．このように絵から立体を読み取る機能をコンピュータでも実現させようとして，今から30年ほど前に次のような“研究”を行なった人がいた．

図1のような線画では，平面が線分によっていくつかの連結領域に分けられている．そこで彼は，線画から立体を読み取る第一歩として次の問題を考えた．

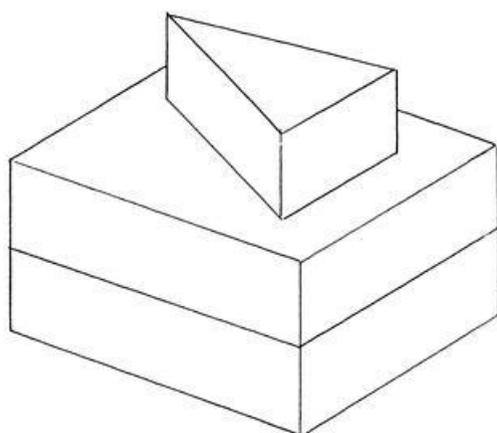


図1 多面体の線画の例

問題1. 線画の中の連結領域のうち，どれとどれが同一の物体に属するかを決定せよ．

そして，この問題を解くために，図2に示すよ

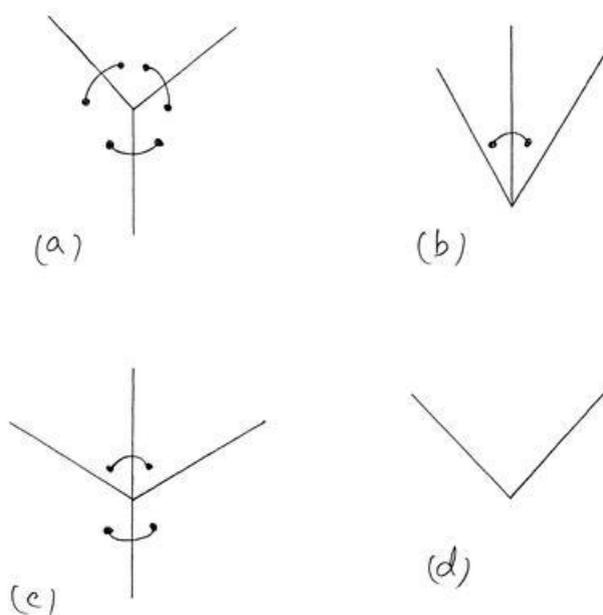


図2 投票規則

うな投票規則を提案した．すなわち，線画の中の頂点の形状に着目し，それぞれの頂点形状に対して，この図の弧の両端の領域が同一の物体に属するという考えに一票を投じるのである．

もうすこし具体的にいうと，図2(a)のように，隣同士のなす角が π 未満であるように3本の線が接続する頂点のまわりでは，互いに隣り合う3組の領域対に対して，同一物体に属するという考えに一票ずつ投じる；同図の(b)のように，3本の線が接続するが隣同士のなす角の一つが π を越えるような頂点のまわりでは，角が π 未満の二つの領域だけに対して同一物体に属するという考えに一票を投じる；同図の(c)のようにまっすぐに貫いた線の両側に1本ずつ別の線が接続している頂点のまわりでは，まっすぐ貫いている線で隣

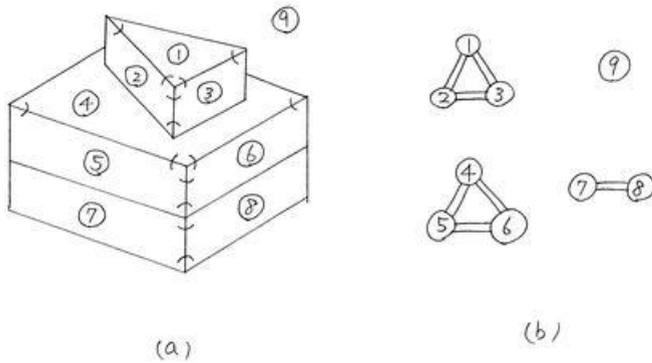


図3 図1の線画に図2の投票規則を適用した結果：
(a) 投票結果；(b) 投票結果のグラフ表現

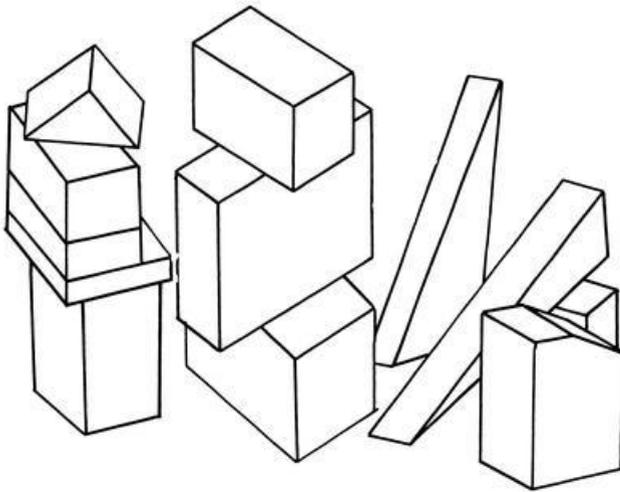


図4 投票規則がうまく働く複雑な絵

り合う両側の領域が同一物体に属するという考えに一票を投じる；同図(d)のように2本の線が接続する頂点のまわりでは一票も投じない。

この投票規則を図1の線画に適用した結果が図3である。線画の中の9個の連結領域に図3(a)に示すように通し番号をつけ、領域をノードとみなし、一票ごとの得票をノードをつなぐ辺とみなすと、図3(b)に示すグラフが得られる。このグラフの連結成分を、同一物体に属する面の集まりであるとみなすと、領域1, 2, 3が属す三角柱、領域4, 5, 6が属す直方体など、図1の線画を見て私達がすなおに思い浮かべる物体に対応した構造が抽出できる。

この方法が提案されたとき、多くのコンピュータビジョン研究者が驚き、注目した。なぜなら、絵から立体を抽出する作業は、人間が人生経験の中で得た膨大な知識を利用して初めてできる複雑なものに違いないと多くの人が信じていたのに、

こんなにも簡単な仕組みで、ある程度のことのできてしまったからである。実際、図4のような複雑な絵に対しても上の投票規則はうまく働く。皆さんご自身で確かめてみて下さい。

2 根拠のない手法の末路

しかし、図2の投票規則に数理的な根拠はなかった。したがって、どういう条件のもとでこの手法がうまくいき、どういう場面でだめになるのかがはっきりしない。そんな手法をロボットの眼のための情報処理などに組み込むことは、あぶなっかしくてできないであろう。

この手法がうまくいかない例を図5(a)に示す。この絵は、直方体の上にもう一つの立体が載っているというのが最もすなおな解釈であろう。しかし図2(a)の投票規則を図5(a)の頂点Pに適用すると、上の物体と下の物体がつながってしまう。

でも彼はこんなことでは諦めなかった。このような不具合を克服しようとして、例外規則を導入した。たとえば、図5(b)に示すように、図2(a)のタイプの頂点につながる一つの線分のもう一方の端が図2(b)のタイプの頂点の π を越える角をはさむ線となっているときには、この線の両側で一票を投じるのをやめる、というのが例外規則の一例である。

確かに、これによって図5(a)の上下の物体がつながってしまうのを防ぐことはできる。しかし例外規則は副作用をもたらす。図5(a)では、頂点QやRに対してもこの例外規則が適用されることになるから、今までうまくいっていた投票が乱されてしまう。そうすると、例外の例外、例外の例外の例外とどんどん複雑な規則を導入することになって破綻してしまうだろうことは想像に難くない。

実は、上に紹介したのはMIT人工知能研究所の博士論文の一つである。厚い論文のほとんどが例外との格闘に費やされている。にもかかわらず、すべての例外に対処できたわけではなく、さらに研究を続ける必要があると結んである。