

第1章 基本的な概念

1. 数の概念

数の概念および四則算法は既知と仮定する*. 初めのうちは実数のみを取扱うから一々ことわらない。次の用語は周知である。

自然数 1, 2, 3 等。物の順位または物の集合の個数を示すために用いられる。

整数 $0, \pm 1, \pm 2$ 等。自然数は正の整数である。

有理数 0 および $\pm \frac{a}{b}$, ただし a, b は自然数, $b=1$ なるとき, それは整数である。

無理数 有理数以外の実数。例えば

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1.4142135\cdots, \\ e &= 2.718281828\cdots, \\ \pi &= 3.1415926535\cdots,\end{aligned}$$

(ただし, それらが有理数でないことは証明を要する。)

十進法 実数を十進法で表わすことも周知である。有理数を十進法で表わせば, 数字は有限か, または無限ならば循環小数になる。ただし, 有限位数の十進数を循環小数の形に表わすこともできる。例えば $0.6 = 0.5999\cdots$ 。無理数を十進法で表わすならば, 無限の位数を要し, 数字は決して循環しない。

我々が十進法によって数を表わすに至ったのは, 手指の数にその原因があるのであろうが, 理論上は 1 以外の任意の自然数を基本として, 十進法と同様の方法によって, 数を表わすことができる。

特に二進法では, 数字は 0 と 1 とだけで足りる。有理数を二進法で表わせば, 分母が 2 の巾** になるもののほかは, 循環二進数になる。

[例]

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} = (0.101).$$

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots = (0.10011\cdots).$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \cdots = (0.101010\cdots).$$

数の幾何学的表現 解析学では便宜上自由に幾何学の術語を流用する。例えば座標法によ

* 附録(I)を参照。

** 巾は幕の仮字(和算の用例による)。

って実数を直線上の点で表現する。その方法は周知である。直線 XX' の上で、0を表わす点 O は座標の原点で、また1が半直線 OX 上の点 E で表わされるとすれば、 OE は長さの単位である。一般に x を表わす点 P は、 x が正あるいは負なるに従って、半直線 OX あるいは OX' の上にあって、 OP の長さがすなわち x の絶対値である。それを $|x|$ と書く。このようにして実数 x, x' が点 P, P' で表わされるならば、 $|x - x'|$ は PP' の長さである。

絶対値に関する次の関係は、しばしば引用される。

$$|x| + |x'| \geq |x + x'| \geq |x| - |x'|.$$

これも周知である。

二つの実数 x, y を一組として、それを (x, y) と書くならば、個々の組 (x, y) と平面上の個々の点 P との間に、座標法によって一対一の対応が成立する。そのとき (x, y) を点 P と略称する。通常は直交座標を用いる。

同じように、三つの実数の組 (x, y, z) は空間の一点によって表わされる。

なお一般に、 n 個の実数の一組 (x_1, x_2, \dots, x_n) を n 次元空間の一点といい、それを一つの文字 P で表わす。

今 $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $P' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ なるとき

$$\sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2}$$

なる数を P, P' の距離と略称して、それを PP' と書く。然らば‘三角関係’ $PP' + P'P'' \geq PP''$ が成り立つ。もしも P を固定すれば

$$PP'^2 = (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2 < \delta^2$$

なる点 P' は、 P を中心とする半径 δ なる‘ n 次元の球’の内部にあるという。もしまだ

$$|x_1 - x'_1| < \delta, \quad |x_2 - x'_2| < \delta, \quad \dots, \quad |x_n - x'_n| < \delta,$$

いい換えれば

$$\text{Max}(|x_1 - x'_1|, \dots, |x_n - x'_n|) < \delta$$

ならば^{*}、 P' は P を中心として稜が座標軸に平行で、その長さが 2δ なる‘ n 次元の立方体’の内部にあるという。

我々は言語の短縮を欲するために、上記のような幾何学的の表現法を用いるのであるから、文字に拘泥して、 n 次元空間に関して奇怪な空想をほしいままにする必要はない。しかし、このような表現法が印象を鮮明にすることの効果は、容易に承認されるであろう。

2. 数の連續性

実数に関して前節で述べたことは、誰もが承認することと仮定したのであったが、数の連續性は解析学の基礎であるから、それを説明しなければならない。

^{*} $\text{Max}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ は a_1, a_2, \dots, a_n の最大の値を表わす記号。同様に Min は最小の値を示す。

すべての数を A, B の二組に分けて, A に属する各数を B に属する各数よりも小ならしめることができたとするとき, このような組分け (A, B) を Dedekind の切斷といい, A を下組, B を上組という.

切斷 (A, B) において, どんな数も, もれなく, 下組か上組かいずれか一方, しかも一方のみに属するという規約は厳重である*.

今一つの数 s を取って, s よりも小なる数をすべて下組に入れ, s よりも大なる数をすべて上組に入れるとする. 切斷を完成するためには, s 自身も下組あるいは上組に入らなければならぬが, もしも s を下組に入れるならば, s は下組の最大級で, そのとき上組に最小数はない. またもし s を上組に入れるならば, s は上組の最小数で, そのとき下組に最大数はない. このようにして任意の数 s を境界とする切斷ができるが, 重要なのはその逆である. すなわち次の定理が成り立つ.

定理 1. 実数の切斷は, 下組と上組との境界として, 一つの数を確定する[Dedekind の定理].

すなわち切斷 (A, B) が与えられたとき, 一つの数 s が存在して, s は A の最大数または B の最小数であり, 初めの場合には B に最小数はなく, 後の場合には A に最大数がないのである. 前のように, 初めに s を取って, それを境界として切斷 (A, B) を作るのではなく, 反対に切斷 (A, B) があるとき, それによって s が決定されるのである.

これが実数の連續性である. 今我々はこの定理は承認されたものとして, それを基礎として, 理論を組立てることにする.

大小の順序のあるところには切斷ができるが, 理論上切斷の三つの型が可能である. すなわち

(1°) 下組に最大数があり, 同時に上組に最小数がある. 約言すれば, 下組と上組との間に飛び(leap)がある.

(2°) 下組に最大数がなく, かつ上組に最小数がない. すなわち下組と上組との間に途切れ(gap)がある.

(3°) 下組または上組に端(最大または最小)があって, 他的一方には端がない. すなわち下組と上組とは連続している.

Dedekind の定理は実数の切斷は(3°)の型に限ることをいうのである.

整数の範囲内では, 切斷は(1°)の型に限る. 有理数の範囲内では, 二つの有理数の中間に必ず他の有理数がある(有理数の稠密性)から, (1°)の型の切斷は不可能であるが, 一方(2°)の型の切斷が可能である. 例えれば $b > \sqrt{2}$ なる有理数 b を上組 B とし, その他の有理数 a を下組 A とすれば, $s = \sqrt{2}$ なる有理数 s はないから, (A, B) は有理数の切斷であるが, それは(2°)の型である. このように有理数だけなら, 一つの有理数にも触れないで, それを A, B の二組に切り離してしまうことができる. このような状態を Dedekind は切斷(Schnitt)なる語で示唆したのであろう.

* ただし, 下組 A , または, 上組 B が空虚(空集合)なることは許さない.