

# 目 次

はじめに.....	1
<b>第1章 正則関数</b>	
§1.1 正則関数 .....	3
§1.2 正則写像 .....	27
<b>第2章 複素多様体</b>	
§2.1 複素多様体 .....	33
§2.2 コンパクト複素多様体 .....	45
§2.3 複素解析族 .....	68
<b>第3章 微分形式, ベクトル束, 層</b>	
§3.1 微分形式 .....	87
§3.2 ベクトル束 .....	106
§3.3 層とコホモロジー .....	121
§3.4 de Rham の定理と Dolbeault の定理 .....	150
§3.5 調和微分形式 .....	161
§3.6 複素直線束 .....	182
<b>第4章 無限小変形</b>	
§4.1 可微分族 .....	203
§4.2 無限小変形 .....	209
<b>第5章 存在定理</b>	
§5.1 障害 .....	231
§5.2 モジュライ数 .....	236
§5.3 存在定理 .....	273

**第6章 完備性の定理**

§6.1 完備性の定理	311
§6.2 モジュライ数	331
§6.3 その後の発展	341

**第7章 安定性の定理**

§7.1 強楕円型偏微分作用素の可微分族	349
§7.2 コンパクト複素多様体の可微分族	374

**附 錄****多様体上の楕円型線型偏微分作用素 (藤原大輔)**

§1 トーラス上の超関数	393
§2 トーラス上の楕円型偏微分作用素	418
§3 ベクトル束の断面の関数空間	442
§4 線型偏微分作用素	453
§5 強楕円型偏微分方程式の弱解の存在	460
§6 楕円型偏微分方程式の弱解の正則性	465
§7 Hilbert 空間 $L^2(X, B)$ での楕円型作用素	467
§8 $\varphi(t)$ の無限回微分可能性	474
索引	481

## は じ め に

$n$  次元複素多様体は Riemann 面の自然な拡張であって、Riemann 面はすなわち 1 次元複素多様体である。Hermann Weyl が名著 “Die Idee der Riemann-schen Fläche”において Riemann 面の概念を確立して Riemann 面上の解析関数の理論を展開したのは 1913 年であった。その Riemann 面の定義がそのまま  $n$  次元複素多様体の定義に拡張されることは一目瞭然であって、現代的に考えればたちまち誰かが Riemann 面の理論の  $n$  次元複素多様体への拡張を試みた筈であるが、当時の数学はそういう風には発展しなかった。 $n$  次元への拡張は 1930 年代になってはじめて W. V. D. Hodge が試みた。その成果は W. V. D. Hodge : The theory and applications of harmonic integrals, Cambridge, 1941, に見られる。この Hodge の研究が出発点となって 1940 年代の後半から 1950 年代に亘って Weyl の Riemann 面の理論の拡張としての複素多様体の理論が発展したのである。

本書は複素多様体の変形理論の発展の様子を述べることを目的として書かれたものである。変形理論は、コンパクト複素多様体  $M$  は有限個の座標近傍を貼り合せたものであるから  $M$  の変形はその貼り合せ方を変えることである、という単純(primitive)な考えに基づく。この考え方から  $M$  の無限小変形はコホモロジー群  $H^1(M, \Theta)$  の元で表わされることが自然に導かれるが、 $M$  の手近かな具体例に当ってみると  $\dim H^1(M, \Theta)$  が  $M$  の定義に組み込まれたパラメータの有効なものの個数と一致したのは不思議であった。この不思議な現象を解明しようという試みを積み重ねて変形理論を展開して行く過程が頗る面白かった。その面白さを伝えたいと考えたのであるが、できるだけ予備知識を仮定せず、わかり易く丁寧に説明するように努めた。複素多様体論入門を兼ねたものを書こうと試みたのである。そのために叙述が長くなつて焦点が定まらず、面白さを十分伝えることができなかつたのは残念である。あるいはこういう面白さは 1 回限りのもので再現することはできないのかも知れない。Kähler 多様体とその変形についても述べ

るべきであったが余り長くなるので省略した。

二,三附け加えると, § 6.3 で述べた倉西族の存在定理(定理 6.5)は 1974 年に Grauert によってコンパクト複素解析空間の普遍族の存在定理に拡張された。それが § 5.3 の終りで引用した最も一般な変形の存在定理である。 $H^2(M, \Theta) = 0$  なる場合の変形の存在定理(定理 5.6)の巾級数による証明は 1974 年に Forster と Knorr が与えた<sup>1)</sup>.

本書の変形理論は附録の楕円型線型偏微分作用素の理論に基づく。附録を執筆された藤原大輔氏の御好意に深く感謝する。

1991 年 8 月

著者

---

1) O. Forster und K. Knorr, Ein neuer Beweis des Satzes von Kodaira-Nirenberg-Spencer, Math. Z., 139 (1974), pp. 257–291.

# 第1章 正則関数

## §1.1 正則関数

### a) 正則関数

$n$  複素変数の正則関数の定義からはじめる。 $n$  個の複素数  $z_1, z_2, \dots, z_n$  の組  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$  の全体からなる集合を  $n$  次元複素数空間といい記号  $\mathbf{C}^n$  で表わす。 $\mathbf{C}^n$  はすなわち  $n$  個の複素平面の直積:  $\mathbf{C}^n = \underbrace{\mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \cdots \times \mathbf{C}}_n$  である。 $(z_1, z_2, \dots, z_n)$  を  $z$  で表わすこととし,  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  を空間  $\mathbf{C}^n$  の点,  $z_1, z_2, \dots, z_n$  を点  $z$  の複素座標 (complex coordinates), あるいは単に座標とよぶ。各複素座標を実数部と虚数部に分けて  $z_1 = x_1 + ix_2, z_2 = x_3 + ix_4, \dots, z_n = x_{2n-1} + ix_{2n}$  と書けば点  $z$  は

$$(1.1) \quad z = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{2n-1}, x_{2n})$$

と表わされる。故に  $\mathbf{C}^n$  は  $2n$  次元実数空間  $\mathbf{R}^{2n}$  に複素座標を導入したものである。(1.1) の右辺の  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2n}$  を点  $z$  の実座標 (real coordinates) という。 $\mathbf{C}^n$  の各点  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  をベクトルと考え,  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  と  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  の 1 次結合を

$$\lambda z + \mu w = (\lambda z_1 + \mu w_1, \lambda z_2 + \mu w_2, \dots, \lambda z_n + \mu w_n), \quad \lambda, \mu \text{ は複素数},$$

と定義すれば  $\mathbf{C}^n$  は複素線型空間 (complex linear space) となる。ベクトル  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  の長さを

$$(1.2) \quad |z| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2}$$

と定義する。

$$(1.3) \quad |\lambda z| = |\lambda| |z|,$$

$$(1.4) \quad |z+w| \leq |z| + |w|$$

なることは明らかであろう。 $z, w \in \mathbf{C}^n$  を  $\mathbf{R}^{2n}$  の 2 点と考えたときの距離は

$$(1.5) \quad |z-w| = \sqrt{|z_1-w_1|^2 + |z_2-w_2|^2 + \cdots + |z_n-w_n|^2}$$

で与えられる。

$\mathbf{C}^n$  の位相<sup>1)</sup>(topology) は  $\mathbf{C}^n$  を  $\mathbf{R}^{2n}$  と考えたときの  $\mathbf{R}^{2n}$  の位相であるとする。したがって、たとえば  $D \subset \mathbf{C}^n$  が  $\mathbf{C}^n$  の領域であるというのは  $D$  を  $\mathbf{R}^{2n}$  の部分集合と考えたとき  $D$  が  $\mathbf{R}^{2n}$  の領域であること、また、或る部分集合  $D \subset \mathbf{C}^n$  で定義された  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  の複素数値をとる関数  $f(z) = f(z_1, z_2, \dots, z_n)$  が連続であるというのは  $f(z)$  が  $z$  の実座標  $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$  の連続関数であることを意味する。

一つの領域  $D \subset \mathbf{C}^n$  で定義された  $n$  変数  $z_1, z_2, \dots, z_n$  の複素数値をとる関数  $f(z) = f(z_1, z_2, \dots, z_n)$  を考察する。

**定義 I.1** 領域  $D \subset \mathbf{C}^n$  において  $f(z) = f(z_1, z_2, \dots, z_n)$  が連続で各変数  $z_k, k = 1, 2, \dots, n$ , について正則なるとき  $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$  は  $D$  で**正則**であるといい、 $f(z) = f(z_1, z_2, \dots, z_n)$  を  $n$  変数  $z_1, z_2, \dots, z_n$  の**正則関数**とよぶ。――

ここで  $f(z_1, \dots, z_k, \dots, z_n)$  が変数  $z_k$  について正則であるというのは  $z_1, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_n$  を固定したとき  $f(z_1, \dots, z_k, \dots, z_n)$  が  $z_k$  の正則関数であることを意味する。

1 変数の正則関数について基本的な円に関する Cauchy の積分公式(複素解析<sup>2)</sup>, 37-38 ページ)は次のようにして  $n$  変数の正則関数に拡張される。点  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbf{C}^n$  と正の実数  $r_1, r_2, \dots, r_n$  に対して

$$(1.6) \quad U_r(c) = \{z \mid z = (z_1, z_2, \dots, z_n), |z_k - c_k| < r_k, k = 1, 2, \dots, n\}$$

とおく。ここで  $r$  は  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$  を表わす。 $z_k$  平面上の  $c_k$  を中心とする半径  $r_k$  の円板を  $U_{r_k}(c_k)$  とすれば  $U_r(c)$  は  $n$  個の円板の直積である:

$$(1.7) \quad U_r(c) = U_{r_1}(c_1) \times U_{r_2}(c_2) \times \cdots \times U_{r_n}(c_n).$$

故に  $U_r(c)$  を  $c$  を中心とする**多重円板**(polydisk)とよぶ。円板  $U_{r_k}(c_k)$  の周囲すなわち  $z_k$  平面上の  $c_k$  を中心とする半径  $r_k$  の円周を  $C_k$  で表わす。 $C_k$  のパラメータ表示はもちろん  $\theta_k \rightarrow \gamma_k(\theta_k) = c_k + r_k e^{i\theta_k}, 0 \leq \theta_k \leq 2\pi$ , で与えられる。円周  $C_1, C_2, \dots, C_n$  の直積:

$$(1.8) \quad \mathbf{C}^n = C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_n$$

は多重円板  $U_r(c)$  の**決定集合**(determining set)とよばれる。もちろん  $\mathbf{C}^n$  は  $n$  次元輪環体( $n$ -dimensional torus)である。 $\mathbf{C}^n$  上で連続な関数  $\psi(\zeta) = \psi(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$

1) “複素解析”(岩波基礎数学選書), 301 ページ参照。

2) 以下, “複素解析”を単に複素解析として引用する。

$\dots, \zeta_n)$ ,  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ ,  $\zeta_1 \in C_1$ ,  $\zeta_2 \in C_2$ ,  $\dots$ ,  $\zeta_n \in C_n$ , が与えられたとき, その  $C^n$  上の積分を

$$(1.9) \quad \int_{C^n} \psi(\zeta) d\zeta_1 d\zeta_2 \cdots d\zeta_n = \int_{C_1} \int_{C_2} \cdots \int_{C_n} \psi(\zeta) d\zeta_1 d\zeta_2 \cdots d\zeta_n \\ = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \psi(\gamma_1(\theta_1), \dots, \gamma_n(\theta_n)) \gamma_1'(\theta_1) \gamma_2'(\theta_2) \cdots \\ \cdots \gamma_n'(\theta_n) d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_n$$

と定義する.

**定理 1.1** 関数  $f(z) = f(z_1, z_2, \dots, z_n)$  が領域  $D \subset C^n$  で正則なるとき, 多重円板  $U_r(c)$  を  $[U_r(c)]^1 \subset D$  なるようにとれば,  $f(z)$  は  $U_r(c)$  において

$$(1.10) \quad f(z) = \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{C^n} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) d\zeta_1 d\zeta_2 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2) \cdots (\zeta_n - z_n)}$$

と表わされる.

**証明** まず  $n=2$  なる場合を考察する. この場合 (1.10) の右辺は

$$\left( \frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma_1(\theta_1), \gamma_2(\theta_2)) \gamma_1'(\theta_1) \gamma_2'(\theta_2)}{(\gamma_1(\theta_1) - z_1)(\gamma_2(\theta_2) - z_2)} d\theta_1 d\theta_2$$

であるが,  $(z_1, z_2) \in U_r(c)$  なるときこの積分の被積分関数は 2 実変数  $\theta_1, \theta_2$  の連続関数である. 故に, 累次積分の公式(解析入門, 323 ページ)により, この積分は

$$\left( \frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_0^{2\pi} \frac{\gamma_1'(\theta_1)}{\gamma_1(\theta_1) - z_1} d\theta_1 \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma_1(\theta_1), \gamma_2(\theta_2)) \gamma_2'(\theta_2)}{\gamma_2(\theta_2) - z_2} d\theta_2$$

に等しい. 故に, Cauchy の積分公式により, (1.10) の右辺は

$$\left( \frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{C_1} \frac{1}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1 \int_{C_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_2 - z_2} d\zeta_2 \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta_1, z_2)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1 = f(z_1, z_2)$$

となる. すなわち公式(1.10)が成り立つ.

一般の場合にも同様に Cauchy の積分公式を繰返し適用すれば, (1.10) の右辺は

$$\left( \frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{C_1} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} \cdots \int_{C_{n-1}} \frac{d\zeta_{n-1}}{\zeta_{n-1} - z_{n-1}} \int_{C_n} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}, \zeta_n)}{\zeta_n - z_n} d\zeta_n$$

1) [ ] は閉包を表す.

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^{n-1} \int_{C_1} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} \cdots \int_{C_{n-1}} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}, z_n)}{\zeta_{n-1} - z_{n-1}} d\zeta_{n-1} \\
&= \cdots = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta_1, z_2, \dots, z_{n-1})}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1 = f(z_1, z_2, \dots, z_n)
\end{aligned}$$

となる。■

1変数の場合正則関数の基本的な性質を円に関する Cauchy の積分公式から導いた(複素解析, 45-52 ページ)。以下同様にして  $n$  変数の正則関数の基本的な性質を上記の積分公式(1.10)から導く。

まず  $\psi(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$  は  $C^n = C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_n$  上の連続関数,  $m_1, m_2, \dots, m_n$  は自然数であるとして積分

$$(1.11) \quad g(z) = \int_{C^n} \frac{\psi(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) d\zeta_1 d\zeta_2 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1)^{m_1} (\zeta_2 - z_2)^{m_2} \cdots (\zeta_n - z_n)^{m_n}}$$

を  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in U_r(c)$  の関数として考察する。関数  $g(z)$  が  $U_r(c)$  において連続であることは明らかであろう。

$$\varphi(\zeta_1) = \int_{C_2} \cdots \int_{C_n} \frac{\psi(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) d\zeta_2 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_2 - z_2)^{m_2} \cdots (\zeta_n - z_n)^{m_n}}$$

とおけば,  $z_2 \in U_{r_2}(c_2), \dots, z_n \in U_{r_n}(c_n)$  を固定したとき,  $\varphi(\zeta_1)$  は円周  $C_1$  上で  $\zeta_1$  の連続関数である。故に

$$(1.12) \quad g(z) = g(z_1, z_2, \dots, z_n) = \int_{C_1} \frac{\varphi(\zeta_1)}{(\zeta_1 - z_1)^{m_1}} d\zeta_1$$

は円板  $U_{r_1}(c_1)$  において  $z_1$  の正則関数である(複素解析, 49 ページ, 補題 1.2)。

同様に  $g(z_1, z_2, \dots, z_n)$  は各変数  $z_k, k=2, 3, \dots, n$ , について  $U_{r_k}(c_k)$  で正則である。故に  $g(z) = g(z_1, z_2, \dots, z_n)$  は多重円板  $U_r(c)$  において  $n$  変数  $z_1, z_2, \dots, z_n$  の正則関数である。(1.12) により, 変数  $z_1$  の正則関数  $g(z_1, z_2, \dots, z_n)$  の導関数は

$$\begin{aligned}
(1.13) \quad &\frac{\partial}{\partial z_1} g(z_1, z_2, \dots, z_n) = m_1 \int_{C_1} \frac{\varphi(\zeta_1)}{(\zeta_1 - z_1)^{m_1+1}} d\zeta_1 \\
&= m_1 \int_{C_1} \int_{C_2} \cdots \int_{C_n} \frac{\psi(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) d\zeta_1 d\zeta_2 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1)^{m_1+1} (\zeta_2 - z_2)^{m_2} \cdots (\zeta_n - z_n)^{m_n}}
\end{aligned}$$

で与えられる。故に偏導関数  $\partial g(z_1, z_2, \dots, z_n)/\partial z_1$  が  $U_r(c)$  において正則である。偏導関数  $\partial g(z_1, z_2, \dots, z_n)/\partial z_k$  についても同様な結果が成り立つ。

この結果を積分公式(1.10)の右辺の積分に繰返し適用することによって次の定

理が得られる:

**定理 I.2** 領域  $D \subset \mathbf{C}^n$  において正則な  $n$  変数  $z_1, z_2, \dots, z_n$  の関数  $f(z) = f(z_1, z_2, \dots, z_n)$  は  $D$  で  $z_1, z_2, \dots, z_n$  について何回でも偏微分可能であって、偏導関数  $\partial^{m_1+m_2+\dots+m_n} f(z)/\partial z_1^{m_1} \partial z_2^{m_2} \dots \partial z_n^{m_n}$  はすべて  $D$  において正則である。多重円板  $U_r(c)$  を  $[U_r(c)] \subset D$  なるようにとれば、各偏導関数は  $U_r(c)$  において

$$(1.14) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial^{m_1+m_2+\dots+m_n}}{\partial z_1^{m_1} \partial z_2^{m_2} \dots \partial z_n^{m_n}} f(z_1, z_2, \dots, z_n) \\ &= \frac{m_1! m_2! \dots m_n!}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbf{C}^n} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) d\zeta_1 d\zeta_2 \dots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1)^{m_1+1} (\zeta_2 - z_2)^{m_2+1} \dots (\zeta_n - z_n)^{m_n+1}} \end{aligned}$$

と表わされる。——

1変数の場合にならって  $f^{(m_1, m_2, \dots, m_n)}(z_1, z_2, \dots, z_n)$  で  $f(z) = f(z_1, z_2, \dots, z_n)$  の偏導関数  $\partial^{m_1+m_2+\dots+m_n} f(z)/\partial z_1^{m_1} \partial z_2^{m_2} \dots \partial z_n^{m_n}$  を表わすこととする。

**定理 I.3** 領域  $D \subset \mathbf{C}^n$  において正則な関数  $f(z) = f(z_1, z_2, \dots, z_n)$  は任意の点  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in D$  を中心とする多重円板  $U_\rho(c) \subset D$  において  $z_1 - c_1, z_2 - c_2, \dots, z_n - c_n$  の絶対収束する巾級数に展開される:

$$(1.15) \quad f(z) = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_n=0}^{\infty} a_{m_1 m_2 \dots m_n} (z_1 - c_1)^{m_1} (z_2 - c_2)^{m_2} \dots (z_n - c_n)^{m_n}.$$

係数  $a_{m_1 m_2 \dots m_n}$  は

$$(1.16) \quad a_{m_1 m_2 \dots m_n} = \frac{1}{m_1! m_2! \dots m_n!} f^{(m_1, m_2, \dots, m_n)}(c_1, c_2, \dots, c_n)$$

で与えられる。

**証明**  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$  なる場合について証明を述べるが、一般の場合は  $z_k - c_k, k = 1, 2, \dots, n$ , をそれぞれ  $z_k$  で置き換えればこの場合に帰着する。

点  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in U_\rho(0)$ ,  $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ , に対して  $|z_k| < r_k < \rho_k, k = 1, 2, \dots, n$ , となるように  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$  を定めれば  $z \in U_r(0)$ ,  $[U_r(0)] \subset U_\rho(0) \subset D$  となる。故に積分公式(1.10)により

$$(1.17) \quad f(z) = \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{\mathbf{C}^n} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) d\zeta_1 d\zeta_2 \dots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2) \dots (\zeta_n - z_n)}.$$

この右辺においては,  $|\zeta_k| = r_k > |z_k|, k = 1, 2, \dots, n$ , であるから

$$\frac{1}{\zeta_k - z_k} = \frac{1}{\zeta_k} \sum_{m_k=0}^{\infty} \left( \frac{z_k}{\zeta_k} \right)^{m_k}, \quad \left| \frac{z_k}{\zeta_k} \right| = \frac{|z_k|}{r_k} < 1, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

これを積分公式(1.17)の右辺に代入すれば巾級数展開:

$$f(z) = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_n=0}^{\infty} a_{m_1 m_2 \dots m_n} z_1^{m_1} z_2^{m_2} \dots z_n^{m_n},$$

$$a_{m_1 m_2 \dots m_n} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{C^n} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)}{\zeta_1^{m_1+1} \zeta_2^{m_2+1} \dots \zeta_n^{m_n+1}} d\zeta_1 d\zeta_2 \dots d\zeta_n,$$

を得る.  $C^n$  上における  $|f(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)|$  の最大値を  $M$  とすれば

$$|a_{m_1 m_2 \dots m_n}| \leq \frac{M}{r_1^{m_1} r_2^{m_2} \dots r_n^{m_n}}$$

となる. 故にこの巾級数は絶対収束する.  $a_{m_1 m_2 \dots m_n} = f^{(m_1, m_2, \dots, m_n)}(0)/m_1! m_2! \dots m_n!$

なることは(1.14)によって明らかである. ■

### b) 巾級数

$0=(0, 0, \dots, 0)$ を中心とする巾級数:

$$\mathfrak{F}(z) = \mathfrak{F}(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_n=0}^{\infty} a_{m_1 m_2 \dots m_n} z_1^{m_1} z_2^{m_2} \dots z_n^{m_n}$$

を考察する. 点  $z$ において巾級数  $\mathfrak{F}(z)$  が収束する場合にはその和も同じ記号  $\mathfrak{F}(z)$  で表わす.

**定理1.4** 点  $w=(w_1, w_2, \dots, w_n)$ ,  $w_1 \neq 0, w_2 \neq 0, \dots, w_n \neq 0$ , に対して巾級数  $\mathfrak{F}(z)$  が  $z=w$  のとき収束するならば  $\mathfrak{F}(z)$  は  $|z_1| < |w_1|, |z_2| < |w_2|, \dots, |z_n| < |w_n|$  のとき絶対収束する. そしてその和  $\mathfrak{F}(z)$  は多重円板  $U_\rho(0)$ ,  $\rho = (|w_1|, |w_2|, \dots, |w_n|)$ , において正則な  $n$ 変数  $z_1, z_2, \dots, z_n$  の関数である.

**証明** 簡明のため  $n=2$ なる場合について証明を述べるが, 証明は  $n \geq 3$ なる場合にもそのまま通用する.

仮定により  $\mathfrak{F}(w)$  が収束するから  $|a_{m_1 m_2} w_1^{m_1} w_2^{m_2}| \leq M < +\infty$ なる定数  $M$  が存在する. したがって

$$|a_{m_1 m_2}| \leq \frac{M}{\rho_1^{m_1} \rho_2^{m_2}}, \quad \rho_1 = |w_1|, \quad \rho_2 = |w_2|.$$

故に  $|z_1| < \rho_1, |z_2| < \rho_2$ なるとき

$$\sum_{m_1, m_2=0}^{\infty} |a_{m_1 m_2} z_1^{m_1} z_2^{m_2}| \leq M \sum_{m_1=0}^{\infty} \left(\frac{|z_1|}{\rho_1}\right)^{m_1} \sum_{m_2=0}^{\infty} \left(\frac{|z_2|}{\rho_2}\right)^{m_2} < +\infty,$$

すなわち巾級数  $\mathfrak{F}(z)$  は絶対収束する. さらに  $0 < r_1 < \rho_1, 0 < r_2 < \rho_2$ なる  $r_1, r_2$  を任意にとって  $z=(z_1, z_2)$  の変域を不等式  $|z_1| \leq r_1, |z_2| \leq r_2$ によって制限すれば,

$$|a_{m_1 m_2} z_1^{m_1} z_2^{m_2}| \leq |a_{m_1 m_2}| r_1^{m_1} r_2^{m_2}, \quad \sum_{m_1, m_2=0}^{\infty} |a_{m_1 m_2}| r_1^{m_1} r_2^{m_2} < +\infty$$

となるから、 $\Re(z)$  は  $[U_r(0)]$ ,  $r = (r_1, r_2)$ , において一様に絶対収束する。故に  $\Re(z)$  は  $[U_r(0)]$  において連続な  $z$  の関数であるが、 $r_1, r_2$  は  $0 < r_1 < \rho_1$ ,  $0 < r_2 < \rho_2$  なる限り任意であった。 $\Re(z) = \Re(z_1, z_2)$  が  $z_2$  を固定したとき  $z_1$  について正則、 $z_1$  を固定したとき  $z_2$  について正則なることは明らかである。故に  $\Re(z_1, z_2)$  は  $U_\rho(0)$  において 2 変数  $z_1, z_2$  の正則関数である。■

0を中心とする巾級数  $\Re(z) = \Re(z_1, z_2, \dots, z_n)$  の変数  $z_k$ ,  $k=1, 2, \dots, n$ , をそれぞれ  $z_k - c_k$  で置き換えると点  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  を中心とする巾級数:

$$\begin{aligned}\Re(z-c) &= \Re(z_1 - c_1, \dots, z_n - c_n) \\ &= \sum_{m_1, \dots, m_n=0}^{\infty} a_{m_1 \dots m_n} (z_1 - c_1)^{m_1} \dots (z_n - c_n)^{m_n}\end{aligned}$$

が得られる。

**系** 点  $w = (w_1, \dots, w_n)$ ,  $w_1 \neq c_1, \dots, w_n \neq c_n$ , に対して巾級数  $\Re(z-c)$  が  $z=w$  のとき収束するならば  $\Re(z-c)$  は  $|z_k - c_k| < |w_k - c_k|$ ,  $k=1, 2, \dots, n$ , なるとき絶対収束し、その和  $\Re(z)$  は多重円板  $U_\rho(c)$ ,  $\rho = (|w_1 - c_1|, \dots, |w_n - c_n|)$ , において正則な  $n$  変数  $z_1, z_2, \dots, z_n$  の関数である。——

巾級数  $\Re(z-c)$  が与えられたとき、 $z \in U_\rho(c)$  ならば  $\Re(z-c)$  が絶対収束するような多重円板  $U_\rho(c)$  のすべての合併集合  $D = \bigcup U_\rho(c)$  を巾級数  $\Re(z-c)$  の収束域といいう。収束域  $D$  は空集合である場合を除けば一つの領域である。 $n=1$  なる場合には巾級数の収束域は空集合であるか円板であるかまたは複素平面  $C$  であるかのいずれかであるが、 $n \geq 2$  なる場合には収束域はいろいろな形をとる<sup>1)</sup>。

この系と定理 1.3 から直ちに次の定理を得る:

**定理 1.5**  $n$  変数の関数  $f(z) = f(z_1, z_2, \dots, z_n)$  が領域  $D \subset C^n$  において正則なるための必要にして十分な条件は  $f(z)$  が各点  $c \in D$  の或る近傍において絶対収束する巾級数  $\Re(z-c)$  に展開されることである。

### c) Cauchy-Riemann の方程式

まず複素平面上の領域  $D \subset C$  において連続微分可能な 1 複素変数  $z$  の関数

1) “解析入門”(岩波基礎数学選書), 293-294 ページ, 例 6.12 参照。

$f(z)$ について考察する。実数部と虚数部に分けて  $z=x+iy$ ,  $f(z)=u+iv$ と書けば  $u, v$  は  $D$ において  $z$ の実座標  $x, y$  の連続微分可能な関数である。 $x, y$ を  $z$ と  $\bar{z}$ で表わせばもちろん

$$x = \frac{1}{2}(z+\bar{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$$

となる。ここで  $z$ と  $\bar{z}$ は独立変数ではないが、 $z, \bar{z}$ をあたかも独立な変数であるかの如く考え、合成関数の微分法の公式(解析入門、277ページ、(6.24))を適用して  $f=f(z)$ の変数  $z$ および  $\bar{z}$ に関する偏微分係数をそれぞれ

$$(1.18) \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

と定義する。 $u$ と  $v$ を用いて表わせば

$$(1.19) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(u_x+v_y) + \frac{i}{2}(-u_y+v_x), \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(u_x-v_y) + \frac{i}{2}(u_y+v_x). \end{cases}$$

したがって Cauchy-Riemann の微分方程式:  $u_x=v_y$ ,  $u_y=-v_x$ は

$$(1.20) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

と書かれる。故に連続微分可能な関数  $f(z)$ が領域  $D$ において  $z$ の正則関数であるための必要にして十分な条件は  $D$ で恒等的に  $\partial f(z)/\partial \bar{z}=0$ となることである。 $f(z)$ が正則関数なる場合には、(1.19)により、

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z} = u_x + iv_x = f'(z)$$

となる(複素解析、12ページ、(1.11))。すなわち  $z$ の正則関数  $f(z)$ については偏微分係数  $\partial f(z)/\partial z$ は微分係数  $df(z)/dz$ と一致する。

つぎに  $n$ 複素変数の関数  $f(z)=f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ を考察する。 $f(z)$ が領域  $W \subset \mathbb{C}^n$ において連続微分可能、 $C^r$ 級、 $C^\infty$ 級、…であるといふのは実数部と虚数部に分けて  $f(z)=u+iv$ と書いたとき  $u$ と  $v$ が  $z$ の実座標  $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ の関数として連続微分可能、 $C^r$ 級、 $C^\infty$ 級、…であることを意味する。 $f(z)$ を領域  $W \subset \mathbb{C}^n$ において連続微分可能な関数とする。