目　　次

1　数概念の起源

1　基　　数

一口に数と言うけれども，その意味するところはかなり複雑である．その複雑さというのは，数は多様な起源のものを統合した抽象概念であるということに由来する．通常，数の起源としては個数を抽象して得られる基数と，事物の「大きさ」を抽象して得られる量とが挙げられることが多い．

実際，長さ，重さ，広さなどを代表とする「大きさ」の概念はそのままでは数を表さないが，単位となる長さ，重さ，広さを取れば，単位との比較によって数との対応が付く．あるいは，かくして数が生じる．ただしこの場合は自然数倍になっているとは限らず，端数が出て来ることが多い．そのために分数や小数が考え出されたのであった．すなわち量が実数概念の母胎であることは確かである．しかしながら，基数と量だけを数の起源と観るのは，西洋数学の伝統的な見方に影響された見解であって，実は数の起源は基数と量だけではない．

仮に基数と量だけが数の起源だとすると負の数はどういうことになるのだろうか？　負の数は仮構されたものであって，真の数ではないというヨーロッパの伝統的見解は古代ギリシアの「数＝基数」説の後遺症のようなものだが，実際には，昨日・今日・明日とか，東西の大通りの名称とか，碁・将棋の段級位制など，順逆の方向性

を持った概念はいくらもあって，負数，あるいは数直線を生み出す背景が確実に存在したことがわかるだろう．東洋では数学が生まれた時期から負数は存在したのであって，ただ西洋数学に登場したのが遅かったというだけのことである．

その他に，方程式の解というのも重要な数の起源の一つである．数直線は方程式の実数解をすべて含んでしまっているので意識されることが少ないかもしれないが，数概念を生み出したという観点から言えば，方程式は量とは別ルートとして存在してきた．極端な例を言えば，虚数というのは「大きさ」でもなければ「方向性」でもない．単に方程式の根として誕生したのである．あまりに基数と量とにこだわった結果，「存在と非存在の両生類」などと摩訶不思議がられたのにすぎないのであって，方程式の根という立場からは $x^2+1=0$ の根は $x^2-2=0$ の根とまったく対等の「実在」であろう．

以下の数節で，各種の数の起源を考えていくことにするのだが，まず基数から始めよう．基数の元となる「個数」という概念には，数える対象が単体ばかりではないので，単位という概念が必要になる．このためエウクレイデス[*1]の『ストイケイア(原論)』の数論は単位の定義から始まり，単位の集まりとして数が定義されている：

(1) 単位とは存在するもののおのおのがそれによって 1 と呼ばれるものである．

(2) 数とは単位からなる多である．

しかしながら，われわれが普通に「数」と呼んでいるものは，こうした個別の事物の個数のことではなく，個数概念から抽象された基数の概念である．あるいは，$1, 2, 3$ などという名称(記号)が象徴

---

*1　英名ではユークリッド．

するような，何かしらとても抽象的な概念である．たとえば，高木貞治は『新撰算術』(1898 年)でこう書いている：

> ここにあまたの物のあるとき，その個々の物よりその一つの物なりということのほか，すべての特性を抽出し去るときは即ち数の観念を生ず．(中略)一つの物に対する数を一と称し，これを表すに 1 という記号をもってす．あまたの一集まりて数を成す．数を表すには 1 をいくつか反復すれば足れり．

確かにエウクレイデスに比べれば，数という抽象概念の本質をよく捉えている．しかし，そのために「すべての特性を抽出し去る」というような数学とはおよそ無縁な説明を必要とするのである．つまり，数学の本性は，以心伝心という秘伝に頼らねば表現できない部分を抱えていることになるのである．この問題をどう解決するかは第 2 章に述べることにして，その前にこうした(個数を超越した)抽象的な数の概念がどのようにして人類の歴史に登場したのかを考えてみよう．

数は極めて古い起源を持つと思われる．たとえば，神々や祖先に対する祭礼の儀式における手順の定めや地位の序列は順序の概念の起源であろうし，敵の数と味方の数の多少を本能的に見分けることはどんな動物にもできるが，それを後方の味方に伝える言葉は個数の概念の起源であろう．しかし，個々の事物を離れた抽象的な数という概念が言語そのものと同じ位古い起源を有するのかとなると，ちょっと様子が異なる．そのあたりを知るためにレヴィ・ブリュルの名著『未開社会の思惟』[11]を覗いてみよう．

『未開社会の思惟』の原題名 *Les fonctions mentales dans les sociétés inférieures* を直訳すれば『劣等社会における心的機能』となる．現代の太平洋に散らばる少数民族やアフリカ，オーストラリア，アメリカの原住民の言語を調査することによって，彼らの精神世界を理解しようというのが趣旨の著作であるが，記述に「劣等社会」とか「蛮人」といった用語が頻出して，かなり心理的に抵抗が強く読み難い．しかし，書かれたのが 1910 年であるということを斟酌すれば，こうした用語も致し方ないと思われる上，内容は決して少数民族に対する蔑視を，言い換えればヨーロッパ文明中心史観を基本的視点に据えたものではない．むしろ「未開民族」[*2]を西欧的な論理性を以て判断することは危険で，同じ現象に対する別の，彼ら特有の把握の仕方があるらしいということを膨大な例から述べている，時代の制約の割には偏見が少なく，良心的に書かれた貴重な文献である．この「別の把握の仕方」をブリュルは「前論理」とか「融即」という術語を造り出して説明している．この前論理というのは「無論理」というのとは違うこと，また西欧現代の論理が前論理から発達したものでもないということを彼は強調しているが，それがどういうものなのかについては「理解を超えている」として判断を保留している．とにかく「矛盾」を少しも問題としないという特徴を備えているのだそうである．

書かれた 1910 年からすでに 100 年を経過していて，こうしたいわゆる未開社会もヨーロッパ文明に接触する機会が増大するにつれ，彼らの感性も大いに変化してきているだろうことを考えれば，

*2　文明の相対性を主張する私の観点からは未開というのは嫌な言葉だが，少数民族，あるいは先住民族では意味が異なる．他に良い言葉を思い付かないので，本書でも未開民族という言葉を踏襲することにする．

ブリュルの著作はなおさら貴重なものに思える．

さて，「未開社会と原始時代とを同一視してはいけない」，あるいは「未開社会の現状から原始時代を推量するのは危険である」ということはしばしば強調されるところである．実際その通りだとは思うが，数概念に限って言えば，参考になることも多々あるのではなかろうか．なぜなら，まず10進法を初めとする数概念関連の発展は，通商とか天文観測といった巨大な国家の存在を抜きにして語ることはできないが，彼らの場合小集団のまま長年経過しているからである．未開民族の場合，極めて小さい数しか認識されないというのは当然で，これは小集団で孤立的に生活していた頃の原始社会でも同じことだったと思われる．事物を離れた(抽象された)数の概念を持たない民族が存在するという事実も，原始社会の数概念がどうだったかを知るのに極めて有益な知識を与えると評価してよいだろう．言葉は悪いが，深海という，その置かれた環境のために，進化が止まった現生生物を観察することによって古代の生物のありようを推量するような面もなくはないと思うのである(勘違いされないように，進化する，あるいは発展するというのは，必ずしも向上した，良くなったということを意味するのではなく，また単に複雑化したばかりではなく，別物に変化したのでもあるということを強調しておく)．

『未開社会の思惟』では数に関する考察がかなりのウェイトを占めるのは，比較しやすさという観点から当然と言えば当然であろう．特に古い伝統を保持していると思われる未開社会に共通に観られる特徴は次のように要約できるだろう：

(1) 数概念が事物から独立していない種族が多い．すなわち抽象的な数は存在しない．

(2) 数える対象の種類によって，数を数える単語が異なる場合が多い．すなわち，人間，丸い物，長い物を勘定するときには，同じ数でも異なる単語が使用される．

(3) 数える対象は3個までであることが多い．それ以上は数詞はなく，身体の部分を対応させて勘定する．

注

(1) 色々な形態の対象を別の数詞で勘定しているが，一般的な勘定へ統一が進みつつある段階の未開民族の言葉もあるらしい．

(2) 日本語のように，1本，1匹，1冊と数助詞が接尾語として付いているのをブリュルは見誤ったのだという指摘もある．確かにそう思われる例もあるが，ずいぶんと語幹が異なっている例もあげられている．このことから，原始時代では数える対象によって数詞が異なったのではないか，という主張をしても誤りではないと思う．

(3) 身体部分を対応させる場合，一渡り終わるともう一度最初に戻ってくるので，けっこう大きな数まで勘定できるらしい．

未開人はとてもたくさんの人や動物を見て，一人あるいは1匹欠けていることを瞬時に悟るという事例が出てくる．未開人はとても記憶力や直感力が優れているので，全体を観たときに1匹足りないと「何やら違和感がある」と感じるのではないだろうか．間違い探しや本の校正などで優れた能力を発揮する人を見かけるが，この「違和感」という一種の直感が，数詞の概念がなくても構成員の少ない社会では困らない理由を説明するだろう．

未開社会でも環境変化のせいか，独自の発展の結果か，対象から

分化した数詞を持つようになっていくらしい．たとえば，子安貝を貨幣代わりに使っている民族が子安貝を数える方法で数を数えるようになった例が挙げられている．いわゆる文明社会で使われている現代語の数詞も，何か特定の物を数えるための数詞がその特定の物から分離して一般的な勘定をする数詞に発展したのであろう．

ギリシア語で「西」は「夕方」を意味する言葉でもあり，「東」も「天体が昇る」ことを意味する．このことは対象物のなごりを感じさせない数詞の方が方角を表す言葉よりも早く事物から独立したことを示していると言えるだろう．

英語では個数を表すときは one, two, three を使い，順序を表すときは first, second, third を使うというのは，印欧語では序数と基数が有史以前から区別されてきたことを示している．おそらくはそれ以前には種別に個数や順序を表す複雑な言語を操っていたのが，抽象的一般的に順序と個数を表す言葉に統一されていったのではなかろうか．

以前から私は 10 までは序数は基数とまったく違う語形を持っていたのが，徐々に統一されていったのではないかと考えていたのだが，『未開社会の思惟』を数十年ぶりに再読しているうちにそうではないと思うようになった．というのは，未開民族では 3 個までしか数詞がない例が多いということを参考にすれば，序数と基数を別の言葉で勘定するのは 3 個までしか数詞がなかった時代のなごりとも考えられるからである．

なお，日本語，中国語などには基数と序数の間の明確な区別はない．たとえば，5 日と書くと，それが 10 月 5 日であれば，序数の例であり，「5 日で仕上げる」と言えば，それは 5 日間という意味であって，基数の例である．だから基数と序数ではどちらが本質的

か，あるいは，どちらが先に生じたのかというのは3までとはいえ序数詞と基数詞が異なる印欧語族の学者の抱く疑問であって，日本人の思い付く疑問ではないだろう．つまり，日本語や中国語では，順序も個数も等しく同じ数として捉えられてきたのである．

さて，数が，元の事物をある程度連想させるにしても，それなりに一般性を有するようになった未開民族には特有の現象が生じてくる．それは数の神秘性・魔術性に関する「迷信」が限りなくたくさん存在する，むしろ数とは魔力を持った神秘そのものであるとすら言えることである．

漢字の世界でも，「数奇」とか「命数」という言葉からわかるように，数は運命を表す．拙著『無限の果てに何があるか』[2]でも引用したのだが，幸田露伴の『運命』は「世おのづから数といふもの有りや．有りといへば有るが如く，無しと為せば無きにも似たり」という文章で始まる．この数は明らかに運命のことである．このような数の持つ神秘性や必然性に対する信仰の起源は，数が独立した時代に遡ること，そしてその前には数が，種類に固有の数詞を持っていて，独立していなかった時代があって，そんな時代までは遡れないということを知るのである．

1が万物の始原であるという思想は洋の東西を問わず見られる．また1が善，秩序，明等々の良きことを象徴し，2が1とは対蹠的に悪，混迷，暗闇等々の悪しきことを象徴するというのはギリシア文明に特有の「迷信」というわけではない．3は多くの民族で完全性を意味するが，これは3までしか数詞がなかった時代のなごりであろう．4はとりわけ神秘性を帯びた数とされるが，これは東西南北と関係するのであろう．4柱の神や4隅を占める神獣が4とい

う数に分離しがたく結び付いている．

7となると一段と神秘性が増してくる．ブリュルもたくさんの例を引いているが，その理由については言及していない．私は，それは7が10までの数の中で最大の素数だからだと思う．詳細は『$\sqrt{2}$の不思議』[1]を参照されたい．

偶数奇数の「迷信」を整数論に昇華したのは古代ギリシアの偉業であるが，整数論の基本概念である素数を貴重と考える心性はどの民族にも共有されている．その元は奇数の方が偶数より貴いと感じる心性である．二つに分割されるより，分割されない方が貴重なのは理解できるだろう．3，7，9をほとんど同一視，あるいは対等視する未開社会が多いそうだが，それは奇数だからである（5が入らない理由は別に考えられる）．偶数奇数の対立の次に来るのが素数の認識である．日本でも，美人三姉妹とか三大景勝地とか言い，五箇条のご誓文，七不思議と言い，自社の製品の宣伝をするときには，特徴を五つ，あるいは七つ，あるいは（素数ではないが）九つ挙げるのが自然である．このようにして因数分解されない数，すなわち数の乗法的元素としての「素数」が登場するのである．七五三と言い，七回忌，十三回忌と言い，すべて素数であることに気が付くが，昔の人は素数という概念を明示的に定義していたわけではないにしても，無意識下には承知していたのである．

ブリュルに言わせると，未開社会において独立した数は系列を成しているのではなく，また四則演算のために存在しているのでもない．数とその名前はそれが表象する神秘的特性に密接に融即しているため，計算上の1単位というよりは，神秘的存在そのものであって，それぞれが魔力を有しているのだそうである．

この「数が個々独立して存在している」という話はプラトンのイ

デア説を連想させる．プラトンはイデア説をピュタゴラス派から受け継いだのだが，ピュタゴラス派が数原子説を唱えたことはよく知られている．プラトンによると数のイデアは独立に存在していて，2は1より大きかったり，1を加えると2になったりするようなものではない．こういう思想の由来は実は極めて古いのだということを未開社会の研究によって知るのである．

2　量

事物の個数も量ではあるが，ここで言う量にはこうした離散的な量は含めず，いわゆる連続的な量を対象とする．量はそれだけでは数ではないが，単位となる量を考え，それと比較することによって，数が生じると考えられる．

たとえば，幾何学的には，線分の長さ，平面図形の面積など，大きさを比較できるものが典型的な量である．しかし，図形の面積が互いに比較可能であることを証明するのは決してやさしいことではない．とんでもなく曲がりくねった図形があるからである．そもそも比較をするためには，図形というものの定義もあらかじめ与えておかなくてはならない．

また，現実世界における，重さ，温度，経過時間，速度なども互いに大きさ，強さなどが線型的に比較できると考えられているので，量である．しかしこうした物理的な量が厳密に比較可能なのかどうかは，その分野の重要な基本問題である．たとえば物体が何であろうと熱さ・冷たさが互いに比較可能であることは熱力学の「第0法則」と呼ばれる「基本原理」である．簡単に言えば，観測や実験に裏付けられた「公準」，すなわち「基本的仮説」である．